



Übungen zu §6

Übung 6.1

Prüfe durch Kopfrechnung, ob die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig sind.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

(c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

(d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 35 \\ -49 \\ 63 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -25 \\ 35 \\ -45 \end{pmatrix}$

Übung 6.2

Bestimme die reelle Zahl t so, dass die Vektoren \vec{u} und \vec{v} linear abhängig sind.

(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ t \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -6t \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} t-6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

Übung 6.3

Gegeben sind in der Ebene die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Stelle die Vektoren \vec{u} und \vec{v} in einem Koordinatensystem durch zwei Pfeile dar, die vom Ursprung $O = (0; 0)$ ausgehen. Ermittle jeweils zeichnerisch die Linearkombinationen $\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$, wobei

$(\lambda; \mu) = (2; 3)$

$(\lambda; \mu) = (4; -3)$

$(\lambda; \mu) = (-3; 1)$

$(\lambda; \mu) = (-4; -5)$

$(\lambda; \mu) = (0; 2)$

$(\lambda; \mu) = (2; 0)$

$(\lambda; \mu) = (0; -3)$

$(\lambda; \mu) = (-2; 0)$

Übung 6.4

Stelle jeweils fest, welche Lage die Geraden g und h zueinander einnehmen. Bestimme den Schnittpunkt, falls sich g und h schneiden.

(a) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

(b) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -17 \\ -23 \\ 38 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -21 \end{pmatrix}$

(e) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \psi \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Übung 6.5

Gegeben sind die sechs Punkte A, B, C, D, E und F. Untersuche die Lage, die die drei Geraden AB, CD und EF zueinander einnehmen. Bestimme jeweils alle auftretenden Schnittpunkte. Charakterisiere abschließend die Konstellation der Geraden.

(a) A = (8; -8; 13)

B = (8; 4; -2)

C = (-4; 2; -1)

D = (20; -2; 7)

E = (2; -6; 12)

F = (12; 4; -3)

(b) A = (11; -2; 10)

B = (-10; 1; -5)

C = (13; -2; -4)

D = (9; -2; -3)

E = (8; 1; 4)

F = (0; 1; 6)

(c) A = (0; 6; 7)

B = (-1; 10; 11)

C = (-1; 5; 5)

D = (5; -4; -1)

E = (5; 1; 3)

F = (0; -4; -5)

(d) A = (3; 7; 10)

B = (8; 7; -5)

C = (9; 5; 4)

D = (5; 9; -8)

E = (3; 1; 1)

F = (5; -1; 7)

(e) A = (-14; -12; 13)

B = (-13; -11; 11)

C = (-9; -7; 3)

D = (-11; -9; 7)

E = (-7; -5; -1)

F = (-4; -2; -7)



Übung 6.6

Gegeben ist die Geradenschar g_t ($t \in \mathbb{R}$) und die Gerade h .

Untersuche, für welche Werte von t die Schargeraden g_t welche Lage zu h einnehmen.

$$(a) \quad g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -15 \\ t \\ -5 \end{pmatrix} \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t^2 \\ -8 \\ t^2 - 8 \end{pmatrix} \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Übung 6.7

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist ein Paar von Geraden g_t und h_t gegeben. Untersuche, für welches t welche Lagebeziehung vorliegt.

$$g_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \quad h_t: \vec{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$$

Übung 6.8

Gegeben seien zwei Parallelen $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ und eine weitere von g und h verschiedene Gerade $k: \vec{X} = \vec{C} + \nu \vec{w}$.

- Beweise, dass k auch parallel zu h ist, wenn k parallel zu g ist.
- Widerlege mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass k auch die Gerade h in einem Punkt T schneiden muss, wenn k die Gerade g in einem Punkt S schneidet.
- Widerlege mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass k auch windschief zu h sein muß, wenn k windschief zu g ist.

Übung 6.9

Gegeben seien zwei Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$, die sich in genau einem Punkt S schneiden, und eine weitere von g und h verschiedene Gerade $k: \vec{X} = \vec{C} + \nu \vec{w}$.

Widerlege mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass die Gerade k auch die Gerade h in einem Punkt U schneiden muß, wenn k die Gerade g in einem Punkt T schneidet.

Übung 6.10

Seien $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ zwei windschiefe Geraden.

Zeige, dass h mindestens eine Parallele k besitzt, die g in genau einem Punkt schneidet.

Übung 6.11

Beweise, dass in der Modellebene \mathbb{R}^2 zwei Geraden g und h nicht windschief sein können.

Übung 6.12

Gegeben sei eine Schar von Geraden $g_t: \vec{X} = \vec{A} + \lambda (\vec{u} + t \vec{v})$, wobei \vec{u} und \vec{v} zwei linear unabhängige Vektoren seien. Außerdem sei eine Gerade $h: \vec{X} = \vec{B} + \mu \vec{w}$ gegeben.

- Beweise, dass keine Schargerade g_t identisch mit h sein kann, wenn eine von ihnen parallel zu h liegt.
- Beweise, dass für jedes $t \neq 1$ die Schargerade g_t die Gerade h schneidet, wenn g_0 die Gerade h in einem Punkt S schneidet und g_1 parallel zu h verläuft.