Übung 6.1

(a) $\begin{pmatrix}-30\\15\\0\end{pmatrix} = -\frac{15}{2}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$ lin. abh. (b) lin. unabh.

(c) lin. unabh. (d) $\begin{pmatrix}-25\\35\\-45\end{pmatrix} = -\frac{5}{7}\begin{pmatrix}35\\-49\\63\end{pmatrix}$ lin. abh.

Übung 6.2

(a) $\begin{pmatrix}-6t\\-6\\3\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}4\\t\\-1\end{pmatrix}$ $[(1)\ -6t = 4\mu\ ]$ für Probe

$(2)\ -6 = t\cdot\mu$

$(3)\ 3 = -\mu \iff \mu = 3$

$(3)\rightarrow(2):\ -6 = 3t \iff t = -2 \quad (4)$

Probe: $(3),(4)\rightarrow(1):\ -6\cdot(-2) = 4\cdot 3$ wahr

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig für $t=-2$

(b) $\begin{pmatrix}t^2\\3\\-5\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}t-6\\-3\\5\end{pmatrix}$ $(1)\ t^2 = \mu(t-6)$

$(2)\ 3 = -3\mu \iff \mu = -1$

$(3)\ -5 = 5\mu \iff \mu = -1$

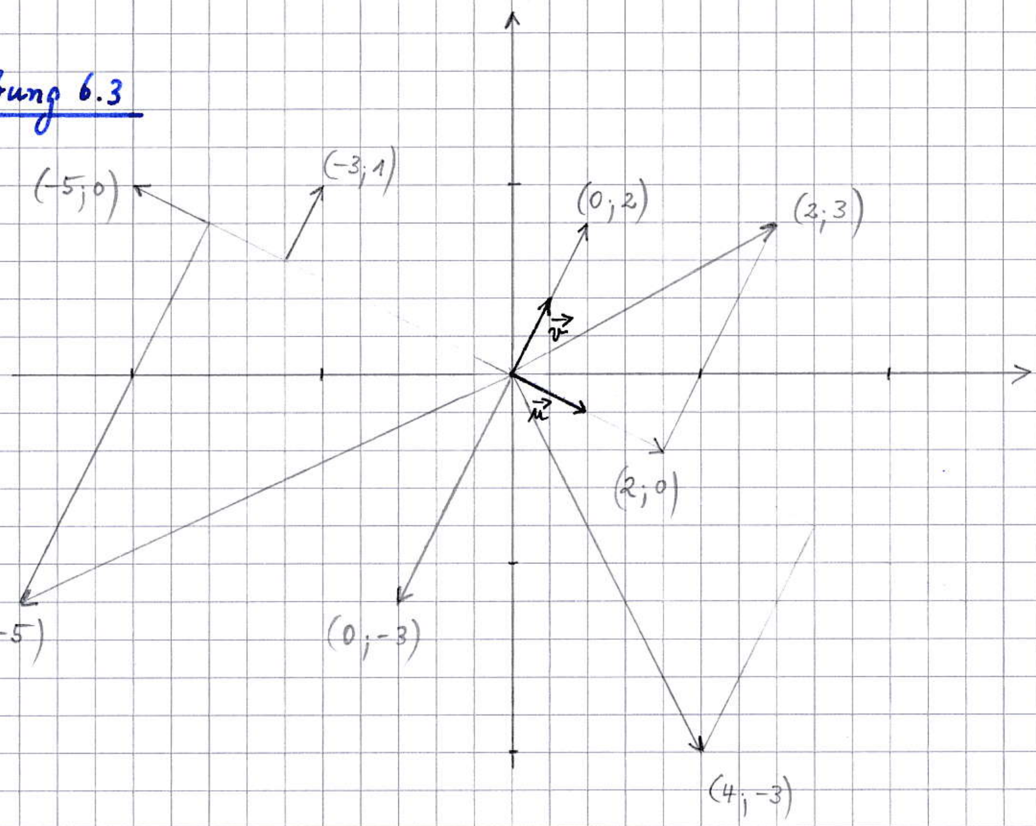
$(3)\rightarrow(1):\ t^2 = -t+6 \iff t^2+t-6 = 0$

$\iff (t+3)(t-2) = 0$

$\iff t=-3 \lor t=2$

Für $t=2$ und $t=-3$ sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig.

Übung 6.3



Übung 6.4

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren sind linear abhängig.

Also sind g und h parallel oder identisch.

$\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

Der Stützpunkt von h liegt nicht auf g; g und h sind parallel.

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig; also sind g und h windschief, oder sie schneiden sich in genau einem Punkt.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -13 \\ 14 \end{pmatrix}$

[(1) $3\alpha - \beta = 9$] für Probe

(2) $-2\alpha + 3\beta = -13$

(3) $\alpha - 4\beta = 14 \Longleftrightarrow 2\alpha - 8\beta = 28$

(2)+(3): $-5\beta = 15 \Longleftrightarrow \beta = -3$ (4)

(4)→(3): $\alpha + 12 = 14 \Longleftrightarrow \alpha = 2$ (5)

(4),(5)→(1): $3 \cdot 2 - (-3) = 9 \Longleftrightarrow 6 + 3 = 9$ [wahr]

g und h schneiden sich in genau einem Punkt S.

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von g und h sind linear unabhängig. Also sind die Geraden windschief, oder sie schneiden sich in genau einem Punkt.

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$$

(1) $\mu + 2\delta = -2$

(2) $\mu = 4$

[(3) $-2\mu - 3\delta = -11$] für Probe

(2) → (1): $4 + 2\delta = -2 \Longleftrightarrow \delta = -3$ (4)

(2), (4) → (3): $-2 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) = -11$ [falsch]

g und h sind windschief.

(d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -17 \\ -23 \\ 38 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -21 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ -21 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren sind linear abhängig; es gilt $g \parallel h$ oder $g = h$.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} -17 \\ -23 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \nu \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -24 \\ 42 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \nu = 3$

Die Geraden g und h sind identisch.

(e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \psi \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Kurzlösung!

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig; g und h sind daher windschief, oder sie schneiden sich in genau einem Punkt S.

(1) $\varphi - 3\psi = -21 \Longleftrightarrow -2\varphi + 6\psi = 42$

(2) $2\varphi + \psi = -7$

[(3) $-2\varphi - 3\psi = -\cancel{1}3$] für Probe

(1)+(2): $7\psi = 35 \Longleftrightarrow \psi = 5$ (4)

(4) → (1): $\varphi - 15 = -21 \Longleftrightarrow \varphi = -6$ (5)

(4), (5) → (3) [wahr]

$\vec{S} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ -12 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Übung 6.5

(a) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}8\\-8\\13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix}$ $CD: \vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}24\\-4\\8\end{pmatrix}$ $EF: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-6\\12\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}10\\10\\-15\end{pmatrix}$

Die drei Richtungsvektoren sind paarweise linear unabhängig.

Schnittpunktansatz $AB \cap CD$:

$$\begin{pmatrix}8\\-8\\13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}24\\-4\\8\end{pmatrix} \iff \lambda\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-24\\4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-12\\10\\-14\end{pmatrix}$$

(1) $-24\mu = -12 \iff \mu = \frac{1}{2}$

(2) $12\lambda + 4\mu = 10$

[(3) $-15\lambda - 8\mu = -14$] für Probe

(1)→(2): $12\lambda + 2 = 10 \iff 12\lambda = 8 \iff \lambda = \frac{2}{3}$ (4)

(1), (4)→(3): $-15 \cdot \frac{2}{3} - 8 \cdot \frac{1}{2} = -14 \iff -10 - 4 = -14$ [wahr]

Die Geraden AB und CD schneiden sich im Punkt S; $\vec{S} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}24\\-4\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$

Schnittpunktansatz $AB \cap EF$:

$$\begin{pmatrix}8\\-8\\13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\\12\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}10\\10\\-15\end{pmatrix} \iff \lambda\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}-10\\-10\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\2\\-1\end{pmatrix}$$

(1) $-10\nu = -6 \iff \nu = \frac{3}{5}$

(2) $12\lambda - 10\nu = 2$

[(3) $-15\lambda + 15\nu = -1$] für Probe

(1)→(2): $12\lambda - 6 = 2 \iff 12\lambda = 8 \iff \lambda = \frac{2}{3}$ (4)

(1), (4)→(3): $-15 \cdot \frac{2}{3} + 15 \cdot \frac{3}{5} = -1 \iff -10 + 9 = -1$ [wahr]

AB und EF schneiden sich im Punkt T mit $\vec{T} = \begin{pmatrix}8\\-8\\13\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\12\\-15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\3\end{pmatrix}$

$S = T$ ist ein gemeinsamer Punkt von AB, CD und EF.

Eine Untersuchung von CD und EF erübrigt sich!

(b) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -21 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix}$; $CD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $EF: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von CD und EF sind linear abhängig:

$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; also sind die Geraden parallel oder identisch.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ [unlösbar]

Die Geraden CD und EF sind parallel.

Die Richtungsvektoren von AB und CD sind linear unabhängig.

AB und CD sind windschief oder schneiden sich in genau einem Punkt.

$\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -21 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} -21 \\ 3 \\ -15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$

(1) $-21\lambda + 4\mu = 2$

(2) $3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

[(3) $-15\lambda - \mu = -14$] für Probe

(2)→(1): $4\mu = 2 \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$ (4)

(2),(4)→(3): $-15 \cdot 0 - \frac{1}{2} = -14$ [falsch] AB und CD sind windschief.

Die Richtungsvektoren von AB und EF sind auch linear unabhängig.

Schnittpunktansatz (verkürzt):

(1) $-21\lambda + 8\nu = -3$

(2) $3\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = 1$

[(3) $-15\lambda - 2\nu = -6$] für Probe

(2)→(1): $-21 + 8\nu = -3 \Leftrightarrow 8\nu = 18 \Leftrightarrow \nu = \frac{9}{4}$ (4)

(2),(4)→(3): $-15 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{9}{4} = -6$ [falsch] AB und EF sind windschief.

Fazit: Es gibt keine Schnittpunkte. Die Gerade AB läuft windschief an den Parallelen CD und EF vorbei.

(e) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $CD: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix}$; $EF: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -8 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren der Geraden sind paarweise linear unabhängig.

Schnittpunktansatz $AB \cap CD$ (verkürzt):

$[(1) \quad -\lambda \quad -6\mu = -1]$ für Probe

$(2) \quad 4\lambda \quad +9\mu = -1$

$(3) \quad 4\lambda \quad +6\mu = -2$

$(2)-(3)$: $\quad 3\mu = 1 \iff \mu = \frac{1}{3} \quad (4)$

$(4)\to(2)$: $\quad 4\lambda + 3 = -1 \iff \lambda = -1 \quad (5)$

$(4),(5)\to(1)$: $\quad 1 - 2 = -1$ [wahr]

AB und CD schneiden sich im Punkt S mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schnittpunktansatz $AB \cap EF$ (verkürzt):

$[(1) \quad -\lambda \quad +5\nu = 5]$ für Probe

$(2) \quad 4\lambda \quad +5\nu = -5$

$(3) \quad 4\lambda \quad +8\nu = -4$

$(2)-(3)$: $\quad -3\nu = -1 \iff \nu = \frac{1}{3} \quad (4)$

$(4)\to(2)$: $\quad 4\lambda + \frac{5}{3} = -5 \iff 4\lambda = -\frac{20}{3} \iff \lambda = -\frac{5}{3} \quad (5)$

$(4),(5)\to(1)$: $\quad -\left(-\frac{5}{3}\right) + 5\cdot\frac{1}{3} = 5 \iff \frac{10}{3} = 5$ [falsch]

AB und EF sind windschief.

Schnittpunktansatz $CD \cap EF$ (verkürzt):

$(1) \quad 6\mu \quad +5\nu = 6$

$[(2) \quad -9\mu \quad +5\nu = -4]$ für Probe

$(3) \quad -6\mu \quad +8\nu = -2$

$(1)+(3)$: $\quad 13\nu = 4 \iff \nu = \frac{4}{13} \quad (4)$

$(4)\to(1)$: $\quad 6\mu + \frac{20}{13} = 6 \iff 6\mu = \frac{58}{13} \iff \mu = \frac{29}{39} \quad (5)$

$(4),(5)\to(2)$: $\quad -9\cdot\frac{29}{39} + 5\cdot\frac{4}{13} = -4 \iff -\frac{87}{13} + \frac{20}{13} = -4$ [falsch]

CD und EF sind ebenfalls windschief.

(d) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\7\\10\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}5\\0\\-15\end{pmatrix}$; $CD: \vec{x} = \begin{pmatrix}9\\5\\4\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}-4\\4\\-12\end{pmatrix}$; $EF: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$

$-2\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\-12\end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren von CD und EF sind linear abhängig.

Punktprobe: $\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\5\\4\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-4\\4\\-12\end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu\begin{pmatrix}-4\\4\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\-4\\-3\end{pmatrix}$ [nicht lösbar!]

Die Geraden CD und EF sind parallel.

Der Richtungsvektor von AB ist linear unabhängig vom Richtungsvektor von CD und linear unabhängig vom Richtungsvektor von EF.

Schnittpunktansatz $AB \cap CD$ (verkürzt):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 5\lambda + 4\mu = 6 \\ &(2) \quad -4\mu = -2 \quad \Leftrightarrow \mu = \tfrac{1}{2} \\ &[(3) \quad -15\lambda + 12\mu = -6] \end{aligned}$$

$(2) \to (1)$: $5\lambda + 2 = 6 \Leftrightarrow 5\lambda = 4 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4}{5}$ (4)

$(2),(4) \to (3)$: $-15 \cdot \frac{4}{5} + 12 \cdot \frac{1}{2} = -6 \Leftrightarrow -12 + 6 = -6$ [wahr]

AB und CD schneiden sich im Punkt S mit $\vec{S} = \begin{pmatrix}9\\5\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4\\4\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\-2\end{pmatrix}$

Schnittpunktansatz $AB \cap EF$ (verkürzt):

$$\begin{aligned} &(1) \quad 5\lambda - 2\nu = 0 \\ &(2) \quad 2\nu = -6 \quad \Leftrightarrow \nu = -3 \\ &[(3) \quad -15\lambda - 6\nu = -9] \end{aligned}$$

$(2) \to (1)$: $5\lambda - 2(-3) = 0 \Leftrightarrow 5\lambda = -6 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{6}{5}$ (4)

$(2),(4) \to (3)$: $-15 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) - 6 \cdot (-3) = -9 \Leftrightarrow 18 + 18 = -9$ [falsch]

AB und EF sind windschief.

(e) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}-14\\-12\\13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$; $CD: \vec{x} = \begin{pmatrix}-9\\-7\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-2\\-2\\4\end{pmatrix}$; $EF: \vec{x} = \begin{pmatrix}-7\\-5\\-1\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}3\\3\\-6\end{pmatrix}$

Offenbar sind die drei Richtungsvektoren paarweise linear abhängig.

Punktprobe: $\begin{pmatrix}-9\\-7\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-12\\13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 5$

Die Geraden AB und CD sind identisch.

Punktprobe: $\begin{pmatrix}-7\\-5\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\-12\\13\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\7\\-14\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 7$

AB und EF sind ebenfalls identisch. Fazit: $AB = CD = EF$

Übung 6.6

(a) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix}t\\-1\\-5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-15\\t\\-5\end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}18\\-12\\6\end{pmatrix}$

Für $t = 10$ sind die Richtungsvektoren linear abhängig: $-\frac{6}{5}\begin{pmatrix}-15\\10\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}18\\-12\\-6\end{pmatrix}$

Für $t \neq 10$ sind die Richtungsvektoren linear unabhängig.

Punktprobe für $t = 10$: $\begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\-1\\-5\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}-15\\10\\-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix}-15\\10\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

Für $t = 10$ sind g_t und h parallel. Für $t \neq 10$ gilt:

$(1)\quad -15\lambda - 18\mu = 7 - t$

$(2)\quad t\cdot\lambda + 12\mu = 1$

$(3)\quad -5\lambda - 6\mu = 4 \Leftrightarrow 15\lambda + 18\mu = -12$

$(1)+(3):\quad 0 = -5 - t \Leftrightarrow t = -5 \quad (4)$

Für $t = -5$ sind die Gleichungen (1) und (3) identisch!

$(4) \to (2):\quad -5\lambda + 12\mu = 1$

$(2)-(3):\quad 18\mu = -3 \Leftrightarrow \mu = -\frac{1}{6} \quad (5)$

$(5) \to (2):\quad -5\lambda - 2 = 1 \Leftrightarrow -5\lambda = 3 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{3}{5}$

Für $t = -5$ schneiden sich g_t und h im Punkt S; $\vec{S} = \begin{pmatrix}7\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 10\}$ sind g_t und h windschief.

(b) $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t^2 \\ -8 \\ t^2-8 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Gleichung $\begin{pmatrix} t^2 \\ -8 \\ t^2-8 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist nur für $\mu = 4$ lösbar

$t^2 = 4 \cdot 1 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -2$

$t^2 - 8 = 4 \cdot (-1) \Leftrightarrow t^2 = 4 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = -2$

Die Richtungsvektoren von g_t und h sind genau dann linear abhängig, wenn $t = 2$ oder $t = -2$ gilt.

Punktprobe für $t = 2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

für $t = -2$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Punktprobe ist in beiden Fällen negativ. Es folgt: $g_2 \parallel h$ und $g_{-2} \parallel h$.

Schnittpunktansatz:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad t^2 \cdot \lambda - \mu = -3 \\
&(2) \quad -8\lambda + 2\mu = 6 \\
&(3) \quad (t^2-8) \cdot \lambda + \mu = -1-t
\end{aligned}
$$

$(1)+(2)$: $(t^2-8)\lambda + \mu = 3 \quad (4)$

$(3)-(4)$: $0 = -4-t \Leftrightarrow t = -4$.

Wir notieren den Ansatz für $t = -4$ neu:

$$
\begin{aligned}
&[(1) \quad 16\lambda - \mu = -3\,] \\
&(2) \quad -8\lambda + 2\mu = 6 \\
&(3) \quad 8\lambda + \mu = 3
\end{aligned}
$$

$(2)+(3)$: $3\mu = 9 \Leftrightarrow \mu = 3 \quad (4)$

$(4) \to (3)$: $8\lambda + 3 = 3 \Leftrightarrow \lambda = 0 \quad (5)$

$(4),(5) \to (1)$: $-3 = -3$ [wahr]

Für $t = -4$ schneiden sich g_t und h im Punkt S mit $\vec{S} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{-4; -2; 2\}$ sind g_t und h windschief.

Übung 6.7

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2t \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ t \end{pmatrix}$ ist nur für $t=-3$ lösbar $[\mu=-2]$.

Punktprobe: $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ [nicht lösbar]

Für $t=-3$ sind g_t und h_t parallel.

Schnittpunktansatz (verkürzt):

$$\begin{aligned}
&(1) \quad -4\lambda - 2\mu = 8-2t \\
&(2) \quad 2\lambda + \mu = -1 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\mu = -2 \\
&(3) \quad 6\lambda - t\cdot\mu = 3
\end{aligned}$$

$(1)+(2): \quad 0 = 6-2t \Leftrightarrow 2t=6 \Leftrightarrow t=3$

Wir notieren den Schnittpunktansatz für $t=3$

$$\left.\begin{aligned}
&(1) \quad -4\lambda - 2\mu = 2 \\
&(2) \quad 2\lambda + \mu = -1
\end{aligned}\right\} \text{äquivalente Gleichungen}$$

$$(3) \quad 6\lambda - 3\mu = 3 \Leftrightarrow -2\lambda + \mu = -1$$

$(2)+(3): \quad 2\mu = -2 \Leftrightarrow \mu = -1 \quad (4)$

$(4)\to(2): \quad 2\lambda - 1 = -1 \Leftrightarrow 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$

Für $t=3$ schneiden sich g_t und h_t im Punkt $S=(6;0;-3)$.

Für $t \in \mathbb{R}\setminus\{-3;3\}$ sind g_t und h_t windschief.

Übung 6.8

$g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u} \qquad h: \vec{x} = \vec{B} + \mu \vec{v} \qquad k: \vec{x} = \vec{C} + \nu \vec{w}$

(a) Weil h parallel zu g ist, muss $\vec{v}$ linear abhängig von $\vec{u}$ sein. Daher gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^*$ mit $\vec{v} = \alpha \vec{u}$. $[\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}]$

Weil auch k parallel zu g ist, gibt es ein $\beta \in \mathbb{R}^*$ mit $\vec{w} = \beta \vec{u}$

Es folgt $\vec{w} = \beta \vec{u} = \beta \cdot \left(\frac{1}{\alpha} \vec{v}\right) = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \vec{v}$

Also gilt $k \parallel h$ oder $k = h$.

Da $k \neq h$ vorausgesetzt ist, folgt $k \parallel h$.

(b) Gegenbeispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

g und h sind offenbar parallel.

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ k schneidet g im Ursprung.

k ist windschief zu h.

(c) Gegenbeispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

[vergleiche mit Teilaufgabe (b)]

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ k ist windschief zu g.

k schneidet h im Ursprung.

Übung 6.9

Gegenbeispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

g und h schneiden sich im Ursprung. $S = (0;0;0)$

$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ schneidet g im Punkt $T = (1;0;0)$

h und k sind jedoch parallel: $h \cap k = \emptyset$

Übung 6.10

Für $g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{B} + \mu \vec{v}$ ist vorausgesetzt, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind. Dann gilt für

$k: \vec{x} = \vec{A} + \nu \vec{v}$: $k \parallel h$ und $g \cap k = \{A\}$.

Übung 6.11

$g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \vec{B} + \mu\vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind, gilt $g \parallel h$ oder $g = h$.
Wir setzen daher für das Folgende voraus, dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear unabhängig sind.

Schnittpunktansatz:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \lambda\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem

(1) $u_1 \cdot \lambda - v_1 \cdot \mu = b_1 - a_1$

(2) $u_2 \cdot \lambda - v_2 \cdot \mu = b_2 - a_2$

hat genau dann genau eine Lösung $(\lambda; \mu)$, wenn die Determinante $\Delta := \begin{vmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \end{vmatrix}$ von 0 verschieden ist.

Für $\Delta \neq 0$ schneiden sich g und h daher in genau einem Punkt.

Wir untersuchen den Fall $\Delta = 0$:

$$u_1(-v_2) - u_2(-v_1) = 0 \Longleftrightarrow u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0$$

Aus dieser Gleichung folgt: Ist eine Komponente von $\vec{u}$ oder $\vec{v}$ gleich 0, so verschwindet auch die entsprechende Komponente des anderen Vektors. Sei o.B.d.A $u_1 = 0$. Dann ist $-u_2 \cdot v_1 = 0$.
Weil $\vec{u} \neq \vec{0}$, gilt $u_2 \neq 0$. Also muss auch $v_1 = 0$ gelten.
Das bedeutet aber, dass die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind.
Da wir aber lineare Unabhängigkeit vorausgesetzt haben, kann keine Komponente der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ verschwinden. Jetzt folgt:

$$\Delta = 0 \Longleftrightarrow u_1 v_2 - u_2 v_1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$$

Mit $\mu := \frac{u_1}{v_1}$ folgt $u_1 = \mu v_1$ und $u_2 = \mu v_2$, also $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

Das bedeutet wiederum lineare Abhängigkeit im Gegensatz zur Voraussetzung.
Der Fall $\Delta = 0$ kann daher nicht eintreten, wenn $\vec{u}$ u. $\vec{v}$ lin. unabh. sind.

Übung 6.12

$g_t : \vec{x} = \vec{A} + \lambda(\vec{u} + t \cdot \vec{v})$; $h : \vec{x} = \vec{B} + \mu \vec{w}$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind als linear unabhängig vorausgesetzt.

(a) Sei $t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben mit $g_{t_0} \parallel h$.

Dann gibt es $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\vec{w} = \alpha(\vec{u} + t_0 \vec{v})$. Wegen $\vec{w} \neq \vec{0}$, gilt auch $\alpha \neq 0$.

Angenommen, es gäbe $t \in \mathbb{R}$ mit $g_t = h$.

Dann gäbe es $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\vec{w} = \beta(\vec{u} + t\vec{v})$

Durch Subtraktion folgt:

$$\vec{0} = \alpha(\vec{u} + t_0 \vec{v}) - \beta(\vec{u} + t\vec{v}) = (\alpha - \beta)\vec{u} + (\alpha t_0 - \beta t)\vec{v}$$

Aus dem Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren folgt

$$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$$

$$\alpha t_0 - \beta t = 0 \Rightarrow \alpha t_0 - \alpha t = 0 \Rightarrow t = t_0$$

Fazit: Es gibt kein $t \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, für das g_t parallel oder identisch zu h ist.

Da $g_{t_0} \parallel h$, gibt es kein $t \in \mathbb{R}$ mit $g_t = h$

(b) $g_1 : \vec{x} = \vec{A} + \lambda(\vec{u} + \vec{v})$ ist parallel zu h

Also gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^*$ mit $\vec{w} = \alpha(\vec{u} + \vec{v})$ (1)

$g_0 : \vec{x} = \vec{A} + \lambda \vec{u}$ schneidet h im Punkt S.

Also gibt es $\lambda_0, \mu_0 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{S} = \vec{A} + \lambda_0 \vec{u} = \vec{B} + \mu_0 \vec{w}$

$$\Rightarrow \lambda_0 \vec{u} - \mu_0 \vec{w} = \vec{B} - \vec{A} \quad (2)$$

Schnittpunktansatz für $g_t \cap h$, wobei $t \neq 1$

$$\vec{A} + \lambda(\vec{u} + t\vec{v}) = \vec{B} + \mu \vec{w}$$

$$\Leftrightarrow \lambda(u + t\vec{v}) - \mu \vec{w} = \vec{B} - \vec{A} \quad (3)$$

(2) $\rightarrow$ (3): $\lambda(\vec{u} + t\vec{v}) - \mu \vec{w} = \lambda_0 \vec{u} - \mu_0 \vec{w}$ (4)

$(1) \to (4):\ \lambda(\vec{u} + t\vec{v}) - \mu(\alpha(\vec{u} + \vec{v})) = \lambda_0 \vec{u} - \mu_0(\alpha(\vec{u} + \vec{v}))$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{u} + \lambda t\vec{v} - \mu\alpha\vec{u} - \mu\alpha\vec{v} = \lambda_0\vec{u} - \mu_0\alpha\vec{u} - \mu_0\alpha\vec{v}$

$\Leftrightarrow (\lambda - \mu\alpha - \lambda_0 + \mu_0\alpha)\,\vec{u} + (\lambda t - \mu\alpha + \mu_0\alpha)\,\vec{v} = \vec{0}$

Aus dem Nullvektorkriterium für linear unabhängige Vektoren folgt:

$(1)^* \quad \lambda - \mu\alpha = \lambda_0 - \mu_0\alpha$

$(2)^* \quad t\cdot\lambda - \mu\alpha = -\mu_0\alpha$

$(2)^* - (1)^*: \quad t\cdot\lambda - \lambda = -\lambda_0 \Leftrightarrow (t-1)\cdot\lambda = -\lambda_0 \underset{t\neq 1}{\Leftrightarrow} \lambda = \frac{-\lambda_0}{t-1} \quad (3)^*$

$(3)^* \to (1)^*: \quad -\frac{\lambda_0}{t-1} - \mu\alpha = \lambda_0 - \mu_0\alpha$

$\Leftrightarrow \quad -\mu\alpha = \lambda_0 - \mu_0\alpha + \frac{\lambda_0}{t-1}$

$\Leftrightarrow \quad \mu = \mu_0 - \frac{\lambda_0}{\alpha} - \frac{\lambda_0}{\alpha(t-1)}$

Der Schnittpunktansatz für $g_t \cap h$ führt für $t \neq 1$ auf genau eine Lösung. g_t und h schneiden sich in genau einem Punkt S_t mit $\vec{S_t} = \vec{A} - \frac{\lambda_0}{t-1}(\vec{u} + t\vec{v})$