§5 Geraden im Modellraum

In den vorangehenden Paragraphen wurden Übungen angeboten, die sich auf Vierecke oder Vierflache beziehen. Dabei wurde mit Anleihen aus dem Anschauungsraum gearbeitet, weil solche Objekte im Modellraum noch nicht definiert sind. Das hat einen einfachen Grund: Wir haben den Begriff „Gerade“ noch nicht in den Modellraum übertragen! Deshalb konnte bislang auch noch nicht von Strecken, Seiten, Diagonalen oder ähnlichen Dingen die Rede sein.

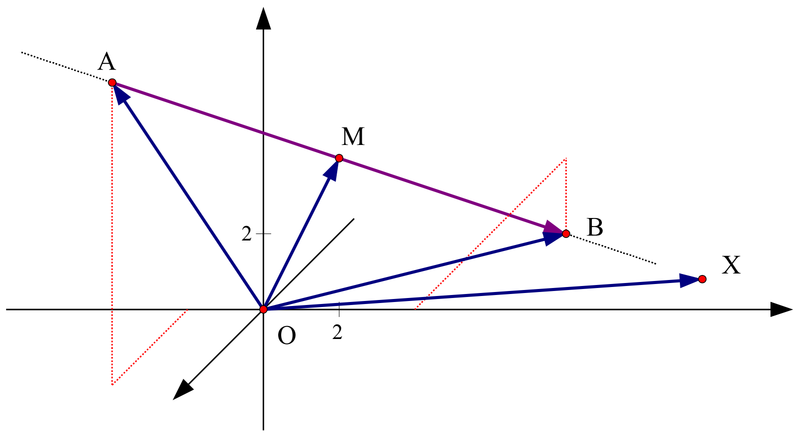
Wir werden in diesem Paragraphen die Voraussetzungen dafür schaffen, dass die notwendigen Definitionen nachgeholt werden können. Wir werden, geleitet von der Anschauung, im Modellraum Geraden konstruieren!

Zunächst erinnern wir uns daran, dass auch der Anschauungsraum nach der Einführung des Koordinatensystems als Punktmenge verstanden wird. Also ist eine Gerade als Teilmenge des Anschauungsraumes ebenfalls eine Punktmenge. Das soll auch für den Modellraum gelten. Für eine Definition des Begriffs „Gerade“ sind nun zwei Dinge zu klären:

(1) Welche Daten legen eine Gerade fest?

(2) Welche Punkte gehören einer festgelegten Geraden an?

Folgen wir der klassischen Geometrie, ist die erste Frage klar beantwortet: Eine Gerade wird durch zwei (verschiedene) Punkte festgelegt. Um für die Beantwortung der zweiten Frage eine Idee zu bekommen, betrachten wir ein Beispiel. Die folgende Zeichnung soll die Punkte A = (–2; 8; 4) und B = (4; –2; –12) und die Gerade durch diese Punkte im Koordinatensystem darstellen.



Zunächst einmal sollen A und B selbst Punkte der (durch A und B definierten) Geraden sein. Für die Gewinnung von weiteren Geradenpunkten stellen wir uns im Anschauungsraum vor, dass die durch den Vektor $\overrightarrow{AB}$ erzeugte Verschiebung den Punkt A entlang der Geraden AB auf den Punkt B bewegt.

Vektoriell wird das ausgedrückt durch die Gleichung

(1) $\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{AB}$

Im Anschluss an die Einführung der Skalarmultiplikation (siehe Anhang zu §4) wurde gezeigt, dass wir im Anschauungsraum jeweils einen weiteren Geradenpunkt erhalten, wenn wir die Bewegung eher, beispielsweise nach der Hälfte, beenden:

(2) $\vec{M} = \vec{A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

länger aushalten:

(3) $\vec{C} = \vec{A} + 3\,\overrightarrow{AB}$

oder mit entgegengesetzter Orientierung ausführen:

(4) $\vec{D} = \vec{A} + (-1)\,\overrightarrow{AB}$

Für einen beliebigen Punkt des Raums X liegt es daher nahe, die Frage, ob er ein Punkt der Geraden durch A und B ist, mit Hilfe folgender Bedingung vektoriell zu entscheiden:

(5) Es gibt eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$

Ein Punkt des Modellraumes soll also genau dann als Element der Geraden durch A und B verstanden werden, wenn er von A aus durch ein skalares Vielfaches des Vektors $\overrightarrow{AB}$ erreichbar ist!

<u>(5.1) Definitionen</u>

(1) Seien A und B zwei verschiedene Punkte des Modellraumes $\mathbb{R}^3$.

Dann heiße die Punktmenge

$$AB := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda \overrightarrow{AB}\}$$

Gerade durch die Punkte A und B.

Die Gleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda \overrightarrow{AB}$ trägt den Namen „Punktrichtungsgleichung“ der Geraden AB.

Der Punkt A wird *Stützpunkt* und die skalare Variable λ *Parameter* der Geradengleichung genannt.

Anstelle von

$$AB := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda \overrightarrow{AB}\}$$

schreiben wir aus praktischen Gründen zukünftig kurz

$AB : \vec{X} = \vec{A} + \lambda \overrightarrow{AB}$ [gelesen: „Die Gerade AB ist gegeben durch die Gleichung ...“].

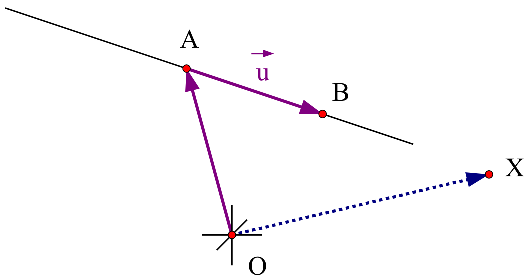
(2) Der Teil der Geraden, der zwischen A und B liegt

$$\{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in [0; 1] \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda \overrightarrow{AB}\}$$

heiße *Strecke zwischen A und B*. Die Strecke zwischen A und B wird mit $\overline{AB}$ bezeichnet.

Offensichtlich genügen die beiden Punkte A und B, die die Gerade AB definieren, selbst der aus ihnen gebildeten Punktrichtungsgleichung; sie sind daher Punkte der Geraden.

Der Name „Punktrichtungsgleichung“ hebt hervor, dass die Gleichung nicht symmetrisch in A und B ist, sondern neben dem Stützpunkt A nur der (Richtung gebende) Vektor $\overrightarrow{AB}$ zur Beschreibung der Geraden verwendet wird. Daraus ergibt sich sofort eine Verallgemeinerung der Begriffsbildung:



<u>(5.2) Bemerkung</u>

Sei A ein Punkt und $\vec{u}$ ein Vektor des Modellraumes $\mathbb{R}^3$, der vom Nullvektor verschieden ist.

Dann ist die Punktmenge

$$g := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}\}$$

eine Gerade im Sinne von Definition (5.1).

Beweis:

Man betrachte den Punkt B, dessen Ortsvektor durch die Beziehung

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{u}$$

definiert ist. Da $\vec{u}$ gemäß Voraussetzung nicht der Nullvektor ist, müssen A und B verschiedene Punkte sein.

Wegen $\vec{u} = -\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{AB}$ ist dann

$$g := \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{X} = \vec{A} + \lambda \vec{u}\} = AB$$

im Sinne von (5.1) die Gerade durch A und B.

Es soll hier noch einmal herausgestellt werden (siehe auch §1), warum uns daran gelegen sein sollte, Geraden mit einer Gleichung zu beschreiben: Eine Gleichung ermöglicht es, für jeden Raumpunkt mittels seiner Koordinaten zweifelsfrei nachzuprüfen, ob er zu einer gegebenen Geraden gehört. Eine Geradengleichung ist ein *Zugehörigkeitskriterium*.

(5.3) Beispiel („Punktprobe“)

Gegeben sei die Gerade $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Prüfe, ob die Punkte $P = (-8; 10; -13)$ und $Q = (17; -5; 17)$ zu g gehören.

Lösung:

$P \in g \;\Leftrightarrow\; \exists \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Wir vereinfachen die Vektorgleichung:

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 10 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\lambda \\ -3\lambda \\ 6\lambda \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist also ein lineares Gleichungssystem mit drei Zeilen und einer Variablen:

$$\begin{array}{llll}
(1) & -10 = 5\lambda & \Leftrightarrow \; \lambda = -2 & \\
(2) & 6 = -3\lambda & & \\
(3) & -12 = 6\lambda & & \\
(1) \rightarrow (2) & 6 = (-3) \cdot (-2) & \text{[wahr]} & \\
(1) \rightarrow (3) & -12 = 6 \cdot (-2) & \text{[wahr]} &
\end{array}$$

Die beiden abschließenden Proben zeigen, dass der Parameterwert $\lambda = -2$ alle drei Gleichungen erfüllt. Der Punkt P liegt daher auf der Geraden g.

Es sei dem Leser überlassen, in gleicher Vorgehensweise zu zeigen, dass der Punkt Q nicht zur Geraden gehört.

1. Anmerkung:

Die im Beispiel zu lösenden linearen Gleichungssysteme sind „überbestimmt“, das heißt, sie enthalten mehr Gleichungen als Variablen. Die Proben sind offenbar unerlässlich, denn erst in ihnen entscheidet sich, ob der Punkt zur Geraden gehört!

2. Anmerkung:

Die Lösung einer Vektorgleichung der Art $\vec{a} = \lambda\, \vec{b}$ kann bei überschaubarem Zahlenmaterial als Kopfrechenaufgabe angesehen werden. Eine (wie die oben gezeigte) schriftliche Ausführung über ein lineares Gleichungssystem ist für den häufigen praktischen Gebrauch zu umständlich. Anstelle dessen genügen Feststellungen, wie beispielsweise

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \lambda = -2 \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \;\text{[Die Gleichung ist nicht lösbar.]}$$

Das Beispiel zeigt, dass ein Punkt P offensichtlich genau dann zu der Geraden $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u}$ gehört, wenn der Vektor $\overrightarrow{AP}$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{u}$ ist. Durch geringfügige Verallgemeinerung dieses Sachverhalts erhalten wir einen beweistechnisch wichtigen Hilfssatz (Lemma[1]).

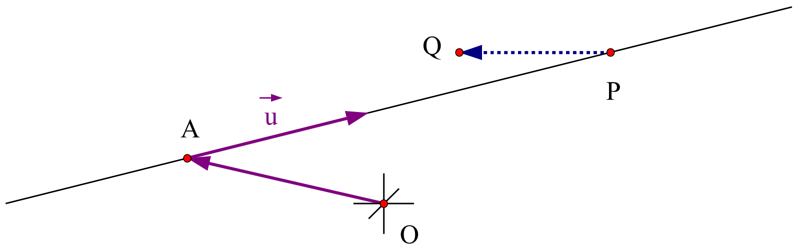
(5.4) Lemma „Richtungskriterium für Geradenpunkte“

Sei $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u}$ eine Gerade und P irgendein Punkt von g.

Dann gilt für jeden Punkt Q des Modellraumes:

Q ist genau dann auch ein Punkt der Geraden, wenn der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ein (skalares) Vielfaches von $\vec{u}$ ist.

1 siehe §B: Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie - Lemma



Beweis:

Da P ein Punkt von g ist, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{P} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$.

Da es sich um eine Äquivalenzaussage handelt, sind zwei Richtungen zu beweisen.

„ ⇒ “:

Sei $Q \in g$ vorausgesetzt.

$\Rightarrow \quad \exists\, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\vec{Q} = \vec{A} + \mu\,\vec{u}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (\vec{A} + \mu\,\vec{u}) - (\vec{A} + \lambda\,\vec{u}) = (\mu - \lambda)\,\vec{u}$

„ ⇐ “

Gebe es also ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \alpha\,\vec{u}$.

$\Rightarrow \quad \vec{Q} = \vec{P} + \overrightarrow{PQ} = (\vec{A} + \lambda\,\vec{u}) + \alpha\,\vec{u} = \vec{A} + (\lambda + \alpha)\,\vec{u}$

$\Rightarrow \quad Q \in g$

Wir benutzen das Lemma sogleich, um den Begriff „Richtungsvektor der Geraden“ in einer möglichst umfassenden Weise einzuführen. Die Definition verdeutlicht, dass eine Gerade nicht genau einen, sondern unendlich viele Richtungsvektoren besitzt.

(5.5) Definition

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade.

Ein Vektor $\vec{v}$ heiße *Richtungsvektor* von g, wenn es zwei Punkte P und Q auf g gibt, sodass $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ gilt.

Beachte, dass wir nicht ausdrücklich ausschließen, dass P und Q identisch sind. Der Nullvektor ist daher immer Bestandteil der Menge aller Richtungsvektoren einer Geraden!

Der in der Geradengleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u}$ verwendete „Richtung gebende“ Vektor $\vec{u}$ sollte ein Richtungsvektor der Geraden im Sinne von Definition (5.5) sein. Die folgende Bemerkung bestätigt und erweitert diese Erwartung.

5.6 Bemerkung

Sei $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade.

Dann ist ein Vektor $\vec{v}$ genau dann ein Richtungsvektor der Geraden, wenn er ein Vielfaches von $\vec{u}$ ist.

Beweis:

„ ⇒ “:

Sei $\vec{v}$ ein Richtungsvektor von g.

$\Rightarrow$ Es gibt zwei Punkte P, Q auf g, sodass $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ gilt.

$\Rightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{PQ}$ ist ein Vielfaches von $\vec{u}$ gemäß Lemma (5.4).

„ ⇐ “:

Sei $\vec{v}$ ein Vielfaches von $\vec{u}$.

$\Rightarrow$ Der Punkt B, definiert durch $\vec{B} = \vec{A} + \vec{v}$, liegt auf g gemäß Lemma (5.4).

$\Rightarrow \quad \vec{v} = -\vec{A} + \vec{B} = \overrightarrow{AB}$ mit $A, B \in g$

$\Rightarrow \quad \vec{v}$ ist gemäß Definition (5.5) ein Richtungsvektor von g.

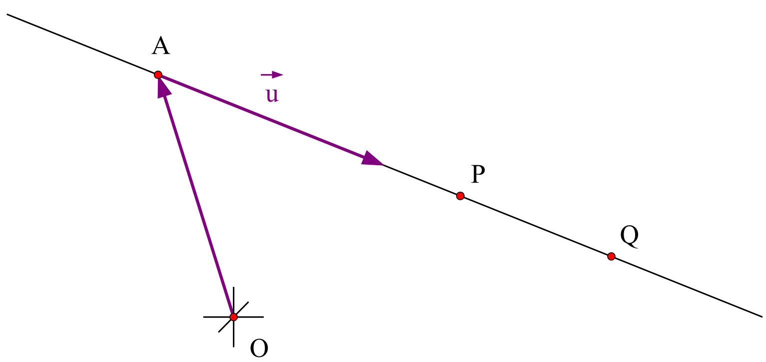
Obwohl eine Gerade unendlich viele Richtungsvektoren besitzt, sprechen wir manchmal von „dem“ Richtungsvektor einer Geraden. Gemeint ist dann immer „der in der Geradengleichung verwendete“ Richtungsvektor!

Nach dieser begrifflichen „Grundsteinlegung“ wollen wir prüfen, ob die im Modellraum geschaffenen Geraden den Anforderungen der Euklidischen Geometrie des Anschauungsraumes standhalten. Dass Geraden durch jeweils zwei (verschiedene) Punkte erzeugt werden können, heißt ja noch nicht, dass sie auch durch diese beiden Punkte eindeutig bestimmt sind. Klarheit darüber wird der „Identitätssatz für Geraden“ verschaffen. Er wird sich als Korollar[2] aus dem folgenden Theorem ergeben.

(5.7) Theorem

Gegeben seien zwei verschiedene Punkte P und Q des Modellraumes.

Ist $g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$ eine Gerade, die durch P und Q verläuft, so ist g mit der Geraden PQ identisch: $g = PQ$



Beweis:

Gemäß Lemma (5.4) gibt es eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass $\overrightarrow{PQ} = \alpha\,\vec{u}$ gilt.

Da P und Q verschiedene Punkte sind, muss die Zahl α von 0 verschieden sein. Daher kann auch umkehrt der Vektor $\vec{u}$ durch den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ausgedrückt werden: $\vec{u} = \frac{1}{\alpha}\overrightarrow{PQ}$

Nach dieser vorbereitenden Überlegung zeigen wir jetzt, dass jeder Punkt der Geraden PQ zur Geraden g und jeder Punkt der Geraden g zur Geraden PQ gehören muss. Aus diesen beiden Teilmengenbeziehungen folgt dann $g = PQ$.

„ $PQ \subset g$ “:

Sei $X \in PQ$.

Dann ist nach Definition (5.5) $\overrightarrow{PX}$ ein Richtungsvektor von PQ.

Nach Lemma (5.4) gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\overrightarrow{PX} = \lambda\,\overrightarrow{PQ} = \lambda\,(\alpha\,\vec{u}) = (\lambda\alpha)\,\vec{u}$

Also ist $\overrightarrow{PX}$ auch ein Richtungsvektor von g.

Weil P auf g liegt, gehört der Punkt X nach Lemma (5.4) zu g.

„ $g \subset PQ$ “:

Sei nun $X \in g$.

Dann ist $\overrightarrow{PX}$ ein Richtungsvektor von g.

Nach Lemma (5.4) existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\overrightarrow{PX} = \mu\,\vec{u} = \mu\,(\frac{1}{\alpha}\overrightarrow{PQ}) = (\frac{\mu}{\alpha})\,\overrightarrow{PQ}$.

Also ist $\overrightarrow{PX}$ auch ein Richtungsvektor von PQ.

Nach Lemma (5.4) gehört der Punkt X zu PQ.

2 siehe §B: Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie - Korollar

Aus dem soeben bewiesenen Theorem ergibt sich direkt der

(5.8) Identitätssatz für Geraden

Haben zwei Geraden zwei (verschiedene) gemeinsame Punkte, so sind sie identisch.

Der Identitätssatz erfasst in exakter Weise den Sinn von Euklids erstem Geradenaxiom: „Durch zwei (verschiedene) Punkte verläuft genau eine Gerade.“ Unsere vektorielle Definition des Geradenbegriffs hat damit die Bewährungsprobe bestanden!

Wegen Lemma (5.4) kann die Identität zweier Geraden, die durch eine Punktrichtungsgleichung definiert sind, auf einfache Weise erkannt werden:

(5.9) Identitätskriterium

Gegeben seien zwei Geraden $g : \vec{X} = \vec{A} + \lambda\, \vec{u}$ und $h : \vec{X} = \vec{B} + \mu\, \vec{v}$.

Dann sind die beiden Geraden g und h genau dann identisch, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) g und h haben (mindestens) einen gemeinsamen Punkt, das heißt, $g \cap h \neq \emptyset$.

(2) Die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind skalare Vielfache voneinander.

Beweis :

„ $\Rightarrow$ “:

Gelte g = h; dann stimmt ihre Durchschnittsmenge natürlich mit g und h überein: $g \cap h = g = h \neq \emptyset$

Seien P und Q zwei verschiedene Punkte auf der Geraden.

Nach Lemma (5.4) gibt es Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\overrightarrow{PQ} = \alpha\, \vec{u} = \beta\, \vec{v}$.

Es folgt einerseits $\vec{v} = \frac{\alpha}{\beta}\, \vec{u}$, andererseits $\vec{u} = \frac{\beta}{\alpha}\, \vec{v}$.

„ $\Leftarrow$ “:

Nach Voraussetzung haben g und h wenigstens einen gemeinsamen Punkt P. Wegen des Identitätssatzes müssen wir nur noch einen zweiten gemeinsamen Punkt Q konstruieren.

Wir betrachten den Punkt Q, für den $\overrightarrow{PQ} = \vec{v}$ gilt.

Gemäß Voraussetzung gibt es ein Skalar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodass $\overrightarrow{PQ} = \vec{v} = \alpha\, \vec{u}$ gilt.

Nach Lemma (5.4) muss Q sowohl auf g als auch auf h liegen.

Zur praktischen Anwendung des Identitätskriterium verfassen wir die beiden folgenden hilfreichen Umformulierungen.

(5.10) Bemerkung

ZweiGeraden g und h seien durch Punktrichtungsgleichungen geben.

Ist bekannt, dass g und h einen gemeinsamen Punkt besitzen, so sind sie genau dann identisch, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.

(5.11) Bemerkung

Zwei Geraden g und h seien durch Punktrichtungsgleichungen geben.

Ist bekannt, dass die Richtungsvektoren der beiden Geraden g und h Vielfache voneinander sind, so sind sie genau dann identisch, wenn ein von einer der beiden Geraden beliebig gewählter Punkt auch auf der anderen Geraden liegt.

Der Charme der Bemerkung (5.11) liegt darin, dass mit einer einfachen Punktprobe über die Identität zweier Geraden entschieden werden kann, wenn bekannt ist, dass ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Für diese Punkt-probe wird praktischer Weise einer der beiden Stützpunkte der Geraden verwendet.

Die Tragweite der Bemerkung (5.11) ist aber noch größer als der erste Anschein vermuten lässt:

(5.12) Folgerung aus dem Identitätskriterium

Zwei Geraden g und h seien durch Punktrichtungsgleichungen geben.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden g und h seien Vielfache voneinander. Dann gilt:

Ist ein von einer der beiden Geraden beliebig gewählter Punkt kein Punkt der anderen Geraden, so sind die beiden Geraden disjunkt[3], das heißt, es gilt $g \cap h = \emptyset$.

Beweis:

Wir gehen unter den gegebenen Voraussetzungen o.B.d.A.[4] davon aus, dass für den Punkt A von g nachgewiesen ist, dass er nicht auf der Geraden h liegt.

Angenommen, es gäbe nun doch noch einen gemeinsamen Punkt P von g und h. Dann müssten aber g und h gemäß Identitätskriterium (5.9) beziehungsweise seiner Umformulierung (5.11) identisch sein.

Aus der Identität würde aber wiederum folgen, dass der Punkt A ein Punkt von h sein muss. Das ergibt einen Widerspruch. Die Annahme, es gäbe einen gemeinsamen Punkt von g und h, ist daher falsch. Die Geraden g und h sind disjunkt.

Aus dem Identitätskriterium folgt übrigens auch noch, dass wir den Stützpunkt und den Richtungsvektor frei auswechseln dürfen, wenn wir eine Gerade durch eine Parametergleichung beschreiben:

(5.13) Austauschbarkeit der Punktrichtungsgleichung

Gegeben sei eine Gerade g.

Sei B irgendein Punkt und $\vec{v}$ irgendein vom Nullvektor verschiedener Richtungsvektor von g.

Dann beschreibt die Parametergleichung $\vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v}$ die Gerade g.

Beweis:

Sei die Gerade g gegeben durch die Gleichung $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\,\vec{u}$.

Sei h die Gerade, die durch die Gleichung $\vec{X} = \vec{B} + \mu\,\vec{v}$ beschrieben wird.

Weil B offenbar ein Punkt von h ist und nach Voraussetzung auch ein Punkt von g sein soll, ist die erste Bedingung des Identitätskriteriums (5.9) erfüllt.

Gemäß Bemerkung (5.6) ist der Vektor $\vec{v}$ ein skalares Vielfaches vom Richtungsvektor $\vec{u}$. Weil beide Vektoren vom Nullvektor verschieden sind, ist auch der Vektor $\vec{u}$ ein Vielfaches des Vektors $\vec{v}$. Damit ist auch die zweite Bedingung des Identitätskriteriums (5.9) erfüllt. Also gilt h = g.

3 Zwei Mengen heißen disjunkt, wenn sie kein gemeinsames Element besitzen. Die Schnittmenge disjunkter Mengen ist leer.

4 siehe §B: Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie