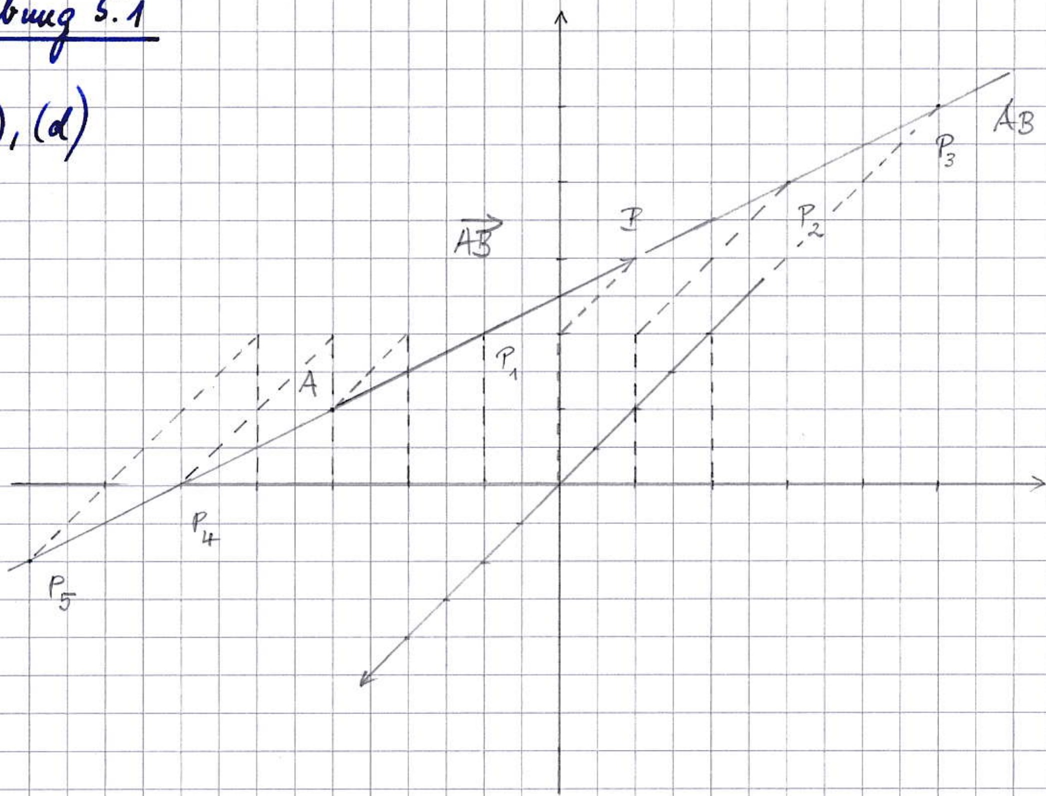
Übung 5.1

(a), (d)



(b) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$

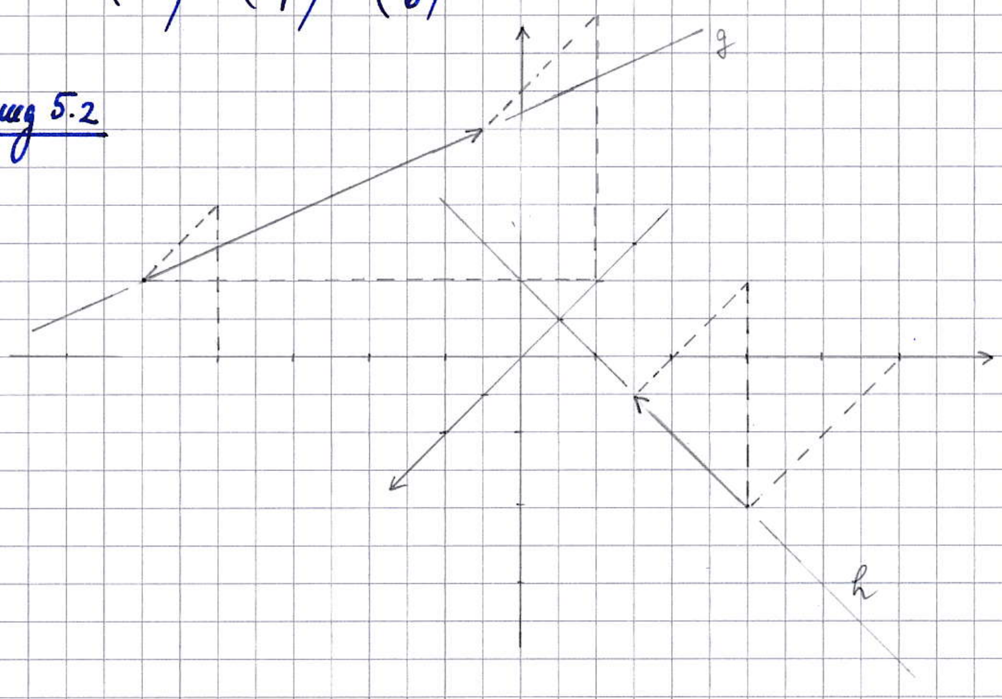
(c) $\vec{P_1} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$; $\vec{P_2} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{P_3} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix}$; $\vec{P_4} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\4\end{pmatrix}$

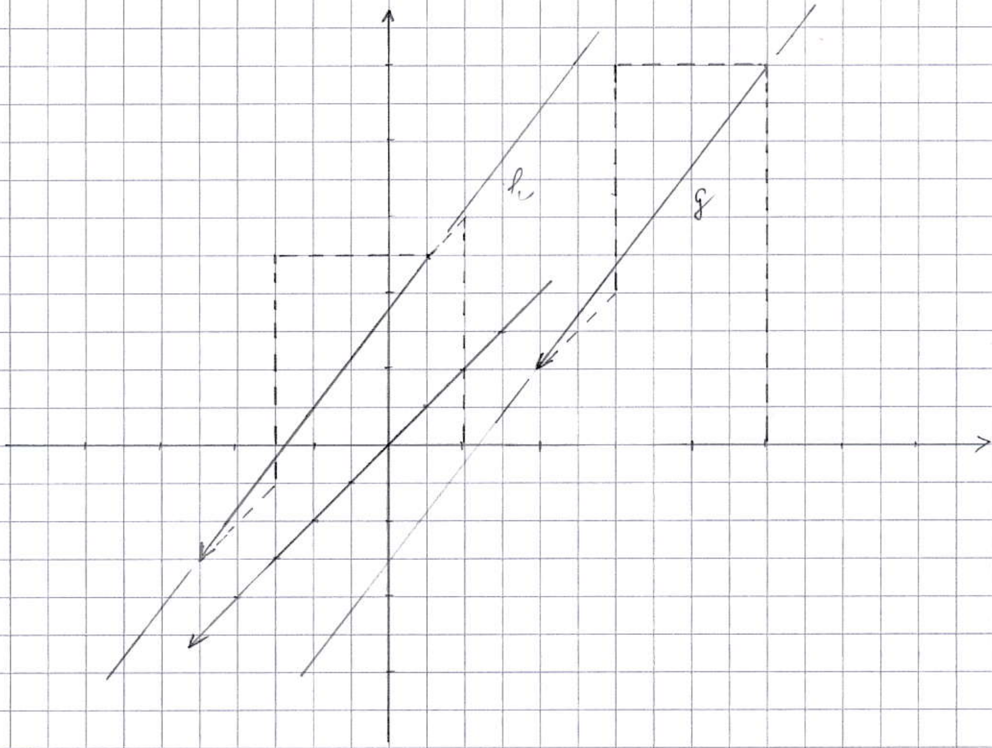
$\vec{P_5} = \begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\6\end{pmatrix}$

Übung 5.2

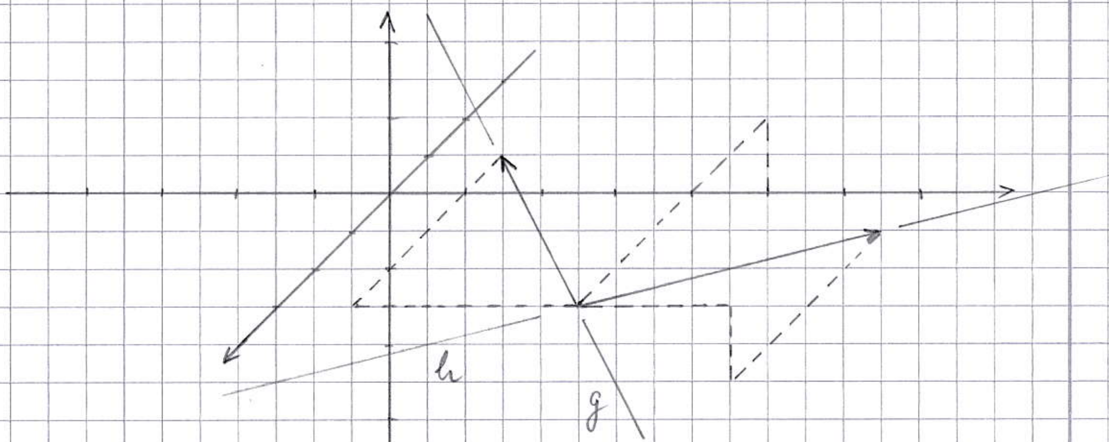
(a)



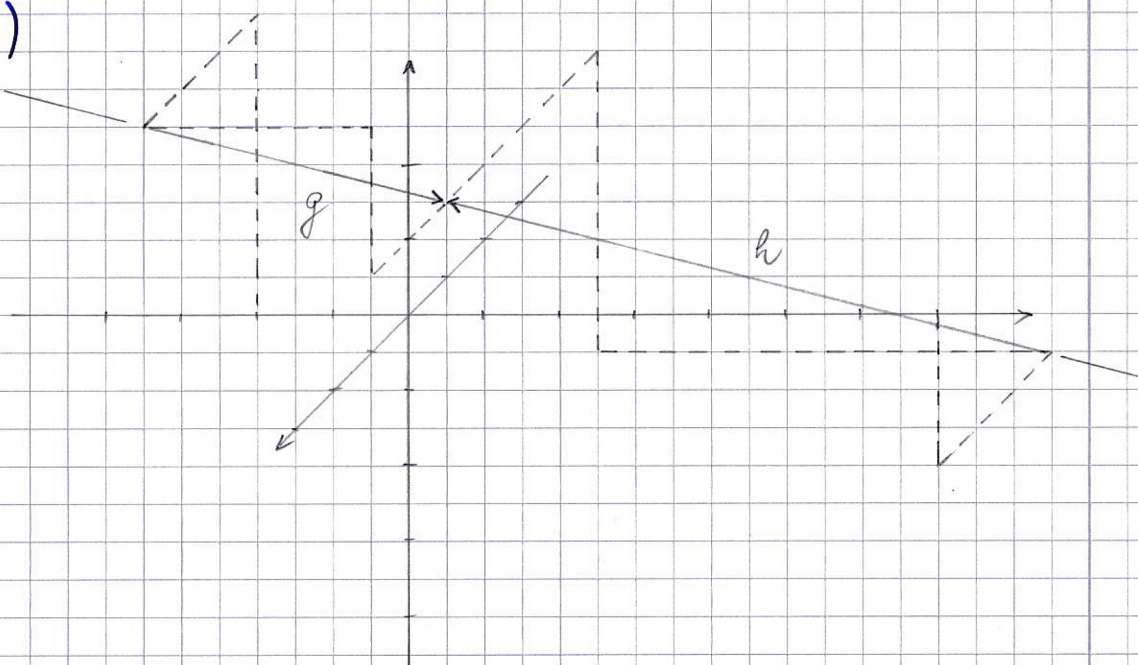
(b)



(c)



(d)



Übung 5.3

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Punktprobe $A \in g$: $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

Da $\lambda = 2$ die Gleichung erfüllt, liegt A auf g.

Punktprobe $B \in g$: $\begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix}$

Da $\lambda = -3$ die Gleichung erfüllt, liegt auch B auf g.

Punktprobe $C \in g$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Offenbar gibt es kein $\lambda \in \mathbb{R}$, das die Gleichung erfüllt. $C \notin g$!

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Punktprobe $A \in g$: $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 14 \end{pmatrix}$

Offenbar ist die Gleichung nicht lösbar. $A \notin g$!

Punktprobe $B \in g$: $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

Da $\lambda = -2$ die Gleichung erfüllt, gilt $B \in g$.

Punktprobe $C \in g$: $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Die Gleichung hat die Lösung $\lambda = 1$; also liegt C auf g.

Übung 5.4

(a) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix}$

Punktprobe $C \in AB$: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3} \qquad C \in \overline{AB}$

Punktprobe $D \in AB$: $\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3} \qquad D \in AB \setminus \overline{AB}$

Punktprobe $E \in AB$: $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix}$

Die Gleichung ist nicht lösbar. $E \notin AB$

(b) $AB: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

Punktprobe $C \in AB$: $\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Gleichung ist nicht lösbar. $C \notin AB$

Punktprobe $D \in AB$: $\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{4} \qquad D \in \overline{AB}$

Punktprobe $E \in AB$: $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Gleichung ist nicht lösbar. $E \notin AB$

Übung 5.5

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{P_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 8 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = 8$

$\vec{P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = 6$

$\vec{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = 4$

$\vec{P_4} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = 2$

$\vec{P_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu = 0$

(b)

λ	-1	0	1	2	3
μ	8	6	4	2	0

Offenbar gilt: $\mu = 6 - 2\lambda$

Diese lineare Beziehung kann aus zwei Wertepaaren mit dem Ansatz $\mu = a \cdot \lambda + b$ gewonnen werden.

In jedem Fall ist ihre Gültigkeit für alle fünf Punkte zu prüfen.

Ist also $P \in g$ durch $\vec{P} := \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben,

dann sollte $\vec{P} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + (6-2\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gelten und deswegen

P auch auf h liegen. Tatsächlich gilt:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + (6-2\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übung 5.6

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Der Richtungsvektor von g ist ein Vielfaches des Richtungsvektors von h: $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

Damit ist das erste Identitätskriterium gemäß Satz (5.9) erfüllt. Wir prüfen, ob der Stützpunkt von h auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ -20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = -2$$

Die Geraden g und h sind gemäß Satz (5.9) identisch.

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$

$-\frac{5}{7} \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$ Die Richtungsvektoren von g und h sind Vielfache voneinander.

$$\begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} 21 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{[nicht lösbar]}$$

Weil der Stützpunkt von h nicht auf g liegt, müssen gemäß Bemerkung (5.12) die Geraden disjunkt sein.

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$

Da die Richtungsvektoren von g und h keine Vielfachen voneinander sind, können die beiden Geraden nach Satz (5.9) nicht identisch sein.

Übung 5.7

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ t \\ -9 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

Wählen wir $t=6$, so sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander: $-\frac{4}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

Für jeden anderen Wert von t ist das nicht der Fall.

Wir prüfen, ob für $t=6$ der Stützpunkt von h zu g gehört:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Nach Satz (5.9) sind die Geraden [für $t=6$] identisch.

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ t \\ 18 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ t \\ -12 \end{pmatrix}$

Für $t=4$ sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander:

$2\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}$. Für jeden anderen Wert von t ist das nicht der Fall.

Wir prüfen, ob für $t=4$ der Stützpunkt von h zu g gehört.

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \iff \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung ist nicht lösbar.

Für keinen Wert von t, auch nicht für $t=4$, ist die Gerade h identisch mit der Geraden g.

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ t \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren sind Vielfache voneinander, falls es $\mu, t \in \mathbb{R}$ gibt mit $\begin{pmatrix} -t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Die 3. Zeile verlangt $\mu = -\frac{1}{3}$, die 1. Zeile dann $t=2$.

Dann ist aber die 2. Zeile nicht erfüllt: $2^2 \neq -\frac{1}{3}(-9)$!