



## §4 Skalarmultiplikation

Die Addition reeller Zahlen birgt nicht nur die Subtraktion in sich, sondern enthält darüber hinaus auch den Keim einer Multiplikation. Die Multiplikation (zu deutsch: Vervielfachung) mit natürlichen Zahlen ist ja nichts anderes als eine mehrfache Addition. Sie kann wie folgt rekursiv beschrieben werden:

$$(1) \quad 0 \cdot a = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad n \cdot a = (n-1) \cdot a + a \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

So gilt aufgrund dieser Beschreibung beispielsweise

$$3 \cdot a = 2 \cdot a + a = (1 \cdot a + a) + a = ((0 \cdot a + a) + a) + a = a + a + a$$

Die Multiplikation reeller Zahlen mit natürlichen Zahlen erfüllt, wie wir wissen, folgende Strukturgesetze:

$$(a) \quad n \cdot (m \cdot a) = (nm) \cdot a \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}_0 \quad \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$(b) \quad (n+m) \cdot a = n \cdot a + m \cdot a \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}_0$$

$$(c) \quad n \cdot (a+b) = n \cdot a + n \cdot b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}_0$$

Die Forderung, dass diese Gesetze auch für die Multiplikation mit negativen ganzen Zahlen gelten sollen, führt dazu, dass diese vollständig festgelegt ist.

Durch die Anwendung der Gesetze folgt nämlich  $\forall a \in \mathbb{R}$  und  $\forall n \in \mathbb{Z}$  mit  $n < 0$ :

$$(3) \quad n \cdot a = n \cdot a + 0$$

$$= n \cdot a + 0 \cdot (-a)$$

$$= n \cdot a + (n + (-n)) \cdot (-a)$$

$$= n \cdot a + (n \cdot (-a) + (-n) \cdot (-a))$$

$$= (n \cdot a + n \cdot (-a)) + (-n) \cdot (-a)$$

$$= n \cdot (a + (-a)) + (-n) \cdot (-a)$$

$$= n \cdot 0 + (-n) \cdot (-a)$$

$$= (-n) \cdot (-a)$$

In dieser Umformungsreihe ist  $-n$  positiv ist; deshalb gilt beispielsweise:

$$(-3) \cdot a = 3 \cdot (-a) = -a + (-a) + (-a)$$

Damit basiert auch die Multiplikation einer reellen Zahl mit ganzen Zahlen in natürlicher Weise auf der Addition. Mit entsprechendem Aufwand lässt sich sogar zeigen, dass letztlich auch die Multiplikation einer reellen Zahl mit reellen Zahlen in kanonischer Weise in der Addition wurzelt.

Offenbar liegt es nahe, auf der Basis der Vektor-Addition in gleicher Weise eine Multiplikation von Vektoren mit reellen Zahlen (nicht mit Vektoren!) zu entfalten.

### (4.1) Definition

Sei  $\vec{a}$  ein Vektor und  $n \in \mathbb{N}$ .

Dann sei das  $n$ -fache des Vektors  $\vec{a}$  definiert durch

$$(1) \quad 0 \vec{a} := \vec{0}$$

$$(2) \quad n \vec{a} := (n-1) \vec{a} + \vec{a}$$

Mit Hilfe seiner Koordinaten kann das  $n$ -fache eines Vektors bequem dargestellt werden.

### (4.2) Satz

Sei  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  ein Vektor und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt  $n \vec{a} = \begin{pmatrix} na_1 \\ na_2 \\ na_3 \end{pmatrix}$ .



Beweis:

(zu 1) Für  $n = 0$  gilt die Aussage offenbar.

(zu 2) Sei deshalb nun  $n > 0$ . Wir zeigen, dass die Aussage automatisch für  $n$  gilt, wenn sie nur für  $n-1$  zutrifft:

$$n \vec{a} = (n-1) \vec{a} + \vec{a} = \begin{pmatrix} (n-1)a_1 \\ (n-1)a_2 \\ (n-1)a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-1)a_1 + a_1 \\ (n-1)a_2 + a_2 \\ (n-1)a_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} na_1 \\ na_2 \\ na_3 \end{pmatrix}$$

Es sei angemerkt, dass die Aussage tatsächlich für alle natürlichen Zahlen bewiesen wurde. Da die Aussage nach (1) für  $n = 0$  richtig ist, muss sie nach (2) auch für  $n = 1$  richtig sein. Weil sie für  $n = 1$  richtig ist, folgt wieder mit (2) automatisch die Richtigkeit für  $n = 2$  und durch Fortsetzung dieser Schlusskette letztlich für alle natürlichen Zahlen.<sup>1</sup>

Der Satz (4.2) stellt sicher, dass die nachfolgend erklärte Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl die in Definition (4.1) definierte Multiplikation mit einer natürlichen Zahl kanonisch erweitert.

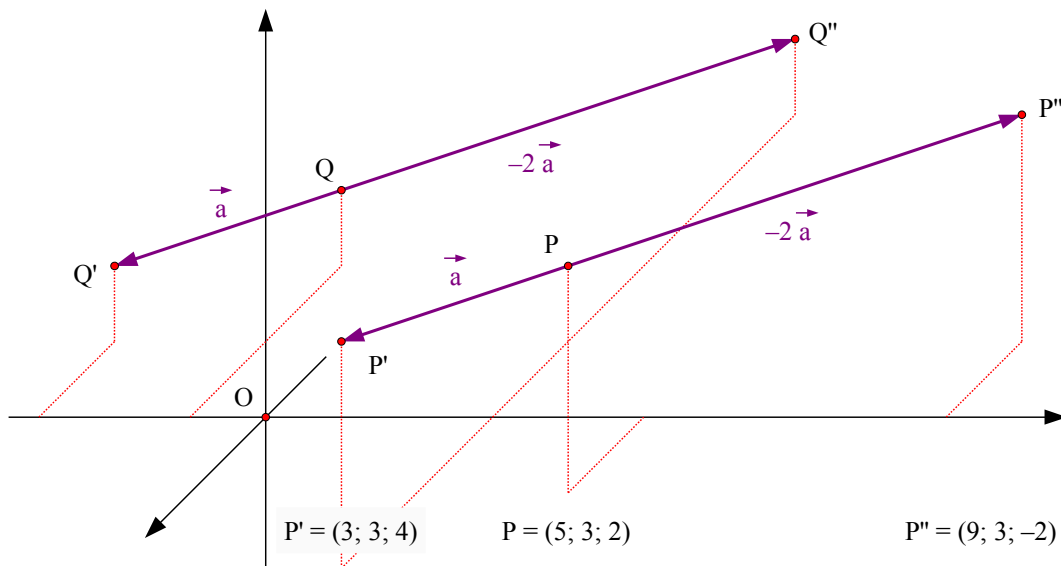
(4.3) Definition

Sei  $\vec{a}$  ein Vektor und  $\lambda$  eine reelle Zahl. Dann heiße der Vektor  $\lambda \vec{a} := \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$  das  $\lambda$ -fache des Vektors  $\vec{a}$ .

Die Verknüpfung, die jeder reellen Zahl  $\lambda$  und jedem Vektor  $\vec{a}$  das  $\lambda$ -fache  $\lambda \vec{a}$  zuordnet, wird *Skalarmultiplikation* genannt. Die reellen Faktoren in einem Vektor-Term heißen *Skalare*.<sup>2</sup>

Die rein algebraische Einführung der Vervielfachung eines Vektors erfolgte ohne Rückgriff auf unsere Anschauung. Zwangsläufig stellt sich deshalb die Frage, was wir uns unter einem Vielfachen eines Vektors vorzustellen haben.

Das nachfolgende Bild eines konkreten Beispiels legt uns die Vorstellung nahe, dass die zu  $\vec{a}$  und  $\lambda \vec{a}$  gehörenden Verschiebungen im Anschauungsraum „gleich gerichtet“ und bei positivem Skalar  $\lambda$  gleich orientiert sonst entgegengesetzt orientiert wirken. Dabei sollten sie sich nur um den Faktor  $|\lambda|$  in der Verschiebungsweite unterscheiden.



Mit „gleich gerichtet“ ist gemeint, dass die durch die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\lambda \vec{a}$  erzeugten Translationen einen Originalpunkt  $P$  so auf Bildpunkte  $P'$  beziehungsweise  $P''$  abbilden, dass, im Anschauungsraum betrachtet, die drei Punkte  $P$ ,  $P'$  und  $P''$  auf einer Geraden liegen. Eine Prüfung dieses Sachverhalts gelingt mit Hilfe des 1. Strahlensatzes; diese ist aber bei konsequenter Durchführung aufwändig. In einem Anhang zu diesem Paragraphen wird der Beweis angedeutet.

1 siehe Kapitel B: Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie – Vollständige Induktion

2 Durch die Multiplikation mit einem Skalar wird ein Vektor „skaliert“, das heißt, unter Beibehaltung der Koordinatenverhltnisse in der Größe verändert.



Die Skalarmultiplikation erfüllt Gesetze, die eine deutliche Analogie zu den bekannten Gesetzen aus der Algebra der reellen Zahlen aufweisen. Die Analogie wird nur dadurch eingeschränkt, dass hier Objekte aus verschiedenen Grundmengen, nämlich Zahlen und Vektoren, miteinander verknüpft werden.

#### (4.4) Satz

Gegeben seien Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sowie reelle Zahlen  $\lambda$  und  $\mu$ .

Dann gilt:

- (1)  $\lambda (\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}$  (gemischt assoziatives Gesetz)
- (2)  $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$  (Distributiv-Gesetz für die Skalare)
- (3)  $\lambda (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$  (Distributiv-Gesetz für die Vektoren)

Beweise:

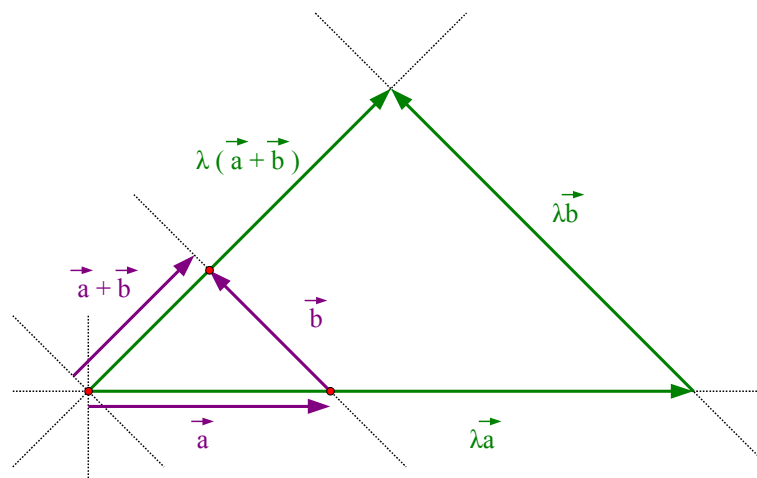
$$(1) \quad \lambda (\mu \vec{a}) := \lambda \begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \mu a_2 \\ \mu a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda (\mu a_1) \\ \lambda (\mu a_2) \\ \lambda (\mu a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda\mu) a_1 \\ (\lambda\mu) a_2 \\ (\lambda\mu) a_3 \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\lambda\mu) \vec{a}$$

(2), (3): Übungen für den Leser

Gesetz (1) besagt, dass mehrfaches Vervielfachen eines Vektors keine algebraischen Probleme aufwirft. Die Multiplikation in  $\mathbb{R}$  und die Skalarmultiplikation vertragen sich!

Gesetz (2) beschreibt die Verträglichkeit der Addition in  $\mathbb{R}$  mit der Skalarmultiplikation. Es ist auch wegen Satz (4.2) in enger Verwandtschaft zu Gesetz (1) zu sehen; beides sind Gesetze über das Multiplizieren eines Vektors.

Gesetz (3) beschreibt schließlich die Verträglichkeit der Skalarmultiplikation mit der Vektor-Addition. Übersetzt in die Sprache des Anschauungsraums ist es nichts anderes als der 2. Strahlensatz, wie die folgende Abbildung zeigt:



Allerdings sollten wir nicht denken, dass der Strahlensatz im Anschauungsraum sei ein Abfallprodukt der Vektorrechnung. Ehrlicherweise müssen wir nämlich zugeben, dass wir den 1. Strahlensatz bei der Konstruktion der Skalarmultiplikation investiert haben. Also ist es kein Wunder, dass wir jetzt den 2. Strahlensatz zurückbekommen. Der Leser wird sich daran erinnern, dass auch in der klassischen Geometrie der 2. Strahlensatz üblicherweise auf den 1. Strahlensatz zurückgeführt wird!

Mit diesen Ausführungen ist die Schaffung der Grundelemente der Analytischen Geometrie abgeschlossen. Es gibt nun ein Modell für den Raum und ein Modell für die geradlinige Bewegung in diesem Raum. Für Punkte und Bewegungen ist eine kohärente Beschreibung gefunden worden.

Darüber hinaus existiert eine algebraische Struktur in der Verknüpfung von Bewegungen, welche große Ähnlichkeit mit der algebraischen Struktur der reellen Zahlen aufweist. Auf dieser Basis wird im folgenden zweiten Teil die Analytische Geometrie so weit entfaltet, wie es ohne das Konzept des Messens möglich ist.



### Anhang zu §4

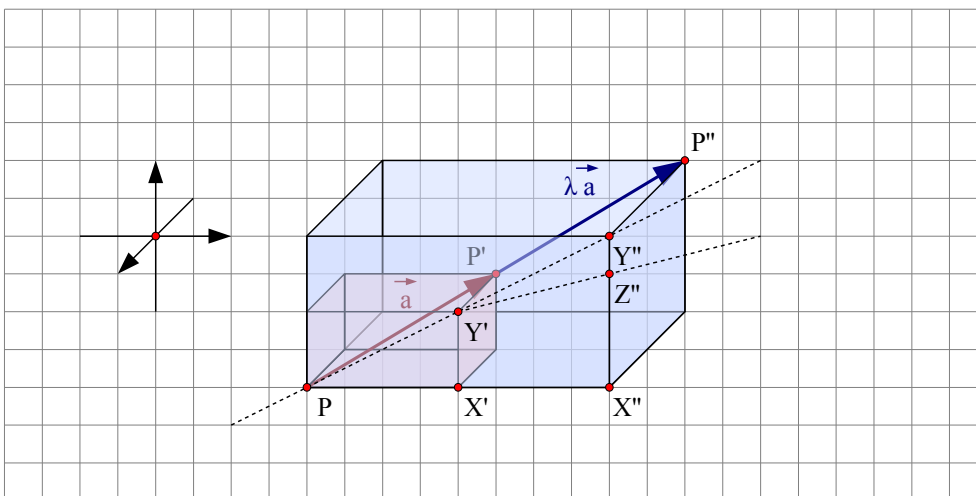
Dieser Anhang soll zeigen, welche Vorgänge im Anschauungsraum mit der Skalarmultiplikation von Vektoren des Modellraumes korrespondieren. Dazu betrachten wir einen Vektor  $\vec{a}$ , einen Skalar  $\lambda$ , einen Punkt P des Anschauungsraumes sowie den Repräsentanten  $\vec{PP'}$  von  $\vec{a}$ , der den Punkt P als Anfangspunkt besitzt.

Damit die Abhandlung nicht zu umfangreich wird, werden die folgenden bequemen Einschränkungen vorgenommen:

Die Koordinaten  $a_1$  und  $a_2$  des Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  seien positiv; außerdem gelte  $\lambda > 0$ .

Unser Ziel ist es nachzuweisen, dass die Multiplikation des Vektors  $\vec{a}$  mit dem Skalar  $\lambda$  den Repräsentanten  $\vec{PP'}$ , ausgehend von dem Zentrum P, zentrisch um den Faktor  $\lambda$  streckt. Das heißt:

Ist  $\vec{PP''}$  der Repräsentant des Vektors  $\lambda \vec{a}$ , so wollen wir nachweisen, dass der Punkt P'' aus dem Punkt P' durch die Zentrische Streckung mit dem Streckzentrum P und dem Streckfaktor  $\lambda$  hervorgeht.



Dazu hüllen wir die Pfeile  $\vec{PP'}$  und  $\vec{PP''}$  mit achsenparallelen Quadern so ein, wie wir es im §2 bei der Einführung der Vektoren beschrieben haben:

Der Quader von  $\vec{PP'}$  besitze die Eckpunkte X' und Y', der Quader von  $\vec{PP''}$  die Eckpunkte X'' und Y'' in der dargestellten Weise.

Im ersten Schritt zeigen wir, dass die Gerade PY' durch Y'' verlaufen muss.

Angenommen, das wäre nicht der Fall. Dann würde die Gerade PY' die Gerade X''Y'' in einem von Y'' verschiedenen Punkt Z'' schneiden. Wir betrachten die Strahlen PY' und PX'' (= PX'').

Weil die Gitterlinien X'Y' und X''Y'' parallel verlaufen, müsste nach dem 2. Strahlensatz  $\frac{\overline{X''Z''}}{\overline{X'Y'}} = \frac{\overline{PX''}}{\overline{PX'}}$  gelten.

Aus  $\overline{PX'} = a_1$ ,  $\overline{PX''} = \lambda a_1$ ,  $\overline{X'Y'} = a_2$  und  $\overline{X''Y''} = \lambda a_2$  folgt aber  $\frac{\overline{PX''}}{\overline{PX'}} = \lambda$  sowie  $\frac{\overline{X''Y''}}{\overline{X'Y'}} = \lambda$  und daher

$\frac{\overline{PX''}}{\overline{PX'}} = \frac{\overline{X''Y''}}{\overline{X'Y'}} = \lambda$ . Das ergibt aber  $\overline{X''Z''} = \overline{X''Y''}$  und damit  $Z'' = Y''$ .

Aus dem 1. Strahlensatz folgt zudem  $\frac{\overline{PY''}}{\overline{PY'}} = \frac{\overline{PX''}}{\overline{PX'}} = \lambda$ .

Im zweiten Schritt können wir nun sicherstellen, dass P'' auf dem Strahl PP' liegen muss.

Diese Erkenntnis liefert wie im ersten Schritt der 2. Strahlensatz, wenn wir die Strahlen PY' (= PY'') und PP' betrachten.

Nach dem 1. Strahlensatz muss dann auch noch  $\frac{\overline{PP''}}{\overline{PP'}} = \lambda$  gelten. Damit ist alles gezeigt.

Offensichtlich müssten die vorangehenden Überlegungen auch noch in den Fällen erfolgen, in denen die Vorzeichen der Koordinaten des Vektors  $\vec{a}$  und des Skalars  $\lambda$  verändert sind. In diesen Fällen wird das gewünschte Ergebnis unter Zuhilfenahme von Achsenspiegelungen erreicht. Wir ersparen uns, das im Detail durchzuführen.