

## Übung 4.1

$$(a) \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{x} + 2\vec{y} - 5\vec{z} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -24 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$(b) \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}; \vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \vec{z} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$4\vec{z} - 2(\vec{x} - 3\vec{y}) = \begin{pmatrix} -20 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} - 2\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -20 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -20 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$$

## Übung 4.2

$$(a) 3\vec{x} - 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\vec{x} - \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 20 \\ -6 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 20/3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(b) 3\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\vec{x} = 7\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 15 \end{pmatrix} - \frac{5}{2}\vec{x} = \begin{pmatrix} 42 \\ -63 \\ -35 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow -\frac{5}{2}\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ -45 \\ -50 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$(c) \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 3$$

$$(d) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mu\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Die Gleichung ist nicht lösbar. Es gibt keinen Skalar  $\mu$ , welcher die Gleichung erfüllt.

### Übung 4.3

$$(1) \quad 3\vec{x} - 2\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 9\vec{x} - 6\vec{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ -30 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad -4\vec{x} + 3\vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -8\vec{x} + 6\vec{y} = \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(1)+(2): \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(3) \rightarrow (1): \quad 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} - 2\vec{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -2\vec{y} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -15 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Probe (3), (4)} \rightarrow (2): \quad -4 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -11 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \checkmark \quad \text{wahr!}$$

### Übung 4.4

$$(a) \quad \text{gegeben: } \vec{AB} = \vec{DC}; \vec{AH} = \vec{HC}; \vec{DH} = \vec{HD}; \vec{x} = \vec{AB}; \vec{y} = \vec{AD}$$

Aus  $\vec{AB} = \vec{DC}$  folgt mit Bemerkung (2.4)  $\vec{AD} = \vec{BC}$ .

$$\vec{CD} = -\vec{DC} = -\vec{AB} = -\vec{x}$$

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{x} + \vec{y}$$

$$\vec{DB} = \vec{AB} - \vec{AD} = \vec{x} - \vec{y}$$

$$\vec{AC} = \vec{AH} + \vec{HC} = \vec{AH} + \vec{AH} = 2\vec{AH} \Rightarrow \text{AB } \vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y})$$

$$\vec{DB} = \vec{DH} + \vec{HD} = \vec{DH} + \vec{DH} = 2\vec{DH} \Rightarrow \vec{DH} = \frac{1}{2}\vec{DB} = \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$(b) \quad \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \vec{A} + \vec{AB} = \vec{A} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad B = (5; -2; -1)$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{AC} = \vec{A} + \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad C = (4; 1; 3)$$

$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{AD} = \vec{A} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad D = (2; 1; 8)$$

$$\vec{H} = \vec{A} + \vec{AH} = \vec{A} + \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{y}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ -1/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad H = \dots$$

## Übung 4.5

Gegeben:  $\vec{AB} = 2\vec{DC}$ ;  $\vec{AH} = 2\vec{HC}$ ;  $\vec{BH} = 2\vec{HD}$ ;  $\vec{x} = \vec{AC}$ ;  $\vec{y} = \vec{BD}$

$$(a) \quad \vec{CD} = -\vec{AC} + \vec{AB} + \vec{BD} = -\vec{AC} + 2\vec{DC} + \vec{BD}$$
$$\Rightarrow 3\vec{CD} = -\vec{AC} + \vec{BD} = -\vec{x} + \vec{y} \Rightarrow \vec{D} = \frac{1}{3}(-\vec{x} + \vec{y})$$

$$\vec{AC} = \vec{x}$$

$$\vec{DB} = -\vec{BD} = -\vec{y}$$

$$\vec{AC} = \vec{AH} + \vec{HC} = 2\vec{HC} + \vec{HC} = 3\vec{HC}$$

$$\Rightarrow \vec{HC} = \frac{1}{3}\vec{AC} \Rightarrow \vec{AH} = 2\vec{HC} = \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{x}$$

$$\vec{BD} = \vec{BH} + \vec{HD} = 2\vec{HD} + \vec{HD} = 3\vec{HD} \Rightarrow \vec{HD} = \frac{1}{3}\vec{BD}$$

$$\Rightarrow \vec{DH} = -\frac{1}{3}\vec{BD} = -\frac{1}{3}\vec{y}$$

$$(b) \quad \vec{M} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{A} = \vec{M} + \vec{MA} = \vec{M} - \vec{AH} = \vec{M} - \frac{2}{3}\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A = (-6; -1; 9)$$

$$\vec{B} = \vec{M} + \vec{MB} = \vec{M} - 2\vec{HD} = \vec{M} + \frac{2}{3}\vec{y} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$B = (-6; 5; 9)$$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{AC} = \vec{A} + \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$C = (-3; -1; 3)$$

$$\vec{D} = \vec{B} + \vec{BD} = \vec{B} + \vec{y} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$D = (-9; 14; 15)$$