



§3 Addition von Vektoren

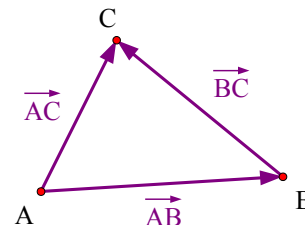
Mit dem \mathbb{R}^3 haben wir ein Modell des Raumes geschaffen, in dem Orte als Punkte unterschieden und Ortsveränderungen (Bewegungen von einem Ort zu einem anderen) als Vektoren erfasst werden können.

Sobald mehr als zwei Orte betrachtet werden, entsteht sofort die Frage nach der Möglichkeit, Bewegungen im Raum zu verknüpfen. Zur exemplarischen Verdeutlichung dieses Anliegens betrachten wir die drei Punkte $A := (3; -2; 5)$, $B := (4; -8; -3)$ und $C := (-5; 7; -4)$. Für diese gilt offenbar:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Einerseits ergeben sich die Koordinaten des Vektors \vec{AC} als Summen der korrespondierenden Koordinaten von \vec{AB} und \vec{BC} :

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (-9) \\ -6 + 15 \\ -8 + (-1) \end{pmatrix}$$



Andererseits ist die durch den Vektor \vec{AC} im Anschauungsraum erzeugte Verschiebung die Verkettung (Hintereinanderausführung) der beiden Verschiebungen, die durch die beiden Vektoren \vec{AB} und \vec{BC} erzeugt werden.

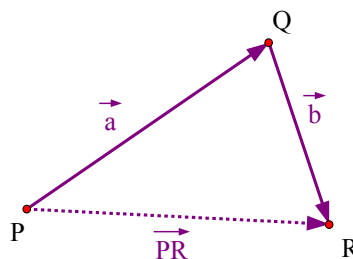
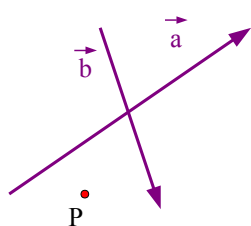
Also scheint dem Addieren miteinander korrespondierender Komponenten zweier Vektoren des Modellraums das Verketteten der zugehörigen Verschiebungen im Anschauungsraum zu entsprechen. Wir formulieren und überprüfen diesen bedeutsamen Sachverhalt:

(3.1) Satz

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren und $P = (p_1; p_2; p_3)$ ein Punkt des \mathbb{R}^3 .

Sei weiterhin Q jener Punkt, für den $\vec{a} = \vec{PQ}$, und R jener Punkt, für den $\vec{b} = \vec{QR}$ gilt.

Dann gilt $\vec{PR} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$.



Beweis:

Gemäß Beweis des Satzes (2.3) gilt:

$$Q = (p_1 + a_1; p_2 + a_2; p_3 + a_3)$$

$$R = ((p_1 + a_1) + b_1; (p_2 + a_2) + b_2; (p_3 + a_3) + b_3)$$

$$= (p_1 + (a_1 + b_1); p_2 + (a_2 + b_2); p_3 + (a_3 + b_3))$$

Die vorgenommene Umformung der Koordinaten von R erlaubt das Assoziativgesetz der Addition reeller Zahlen.

Gemäß Definition (2.2) folgt:

$$\vec{PR} = \begin{pmatrix} p_1 + (a_1 + b_1) - p_1 \\ p_2 + (a_2 + b_2) - p_2 \\ p_3 + (a_3 + b_3) - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



Da der „Ausgangspunkt“ P frei gewählt werden kann, bestätigt der vorangehende Satz, dass die Verkettung der zu

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gehörenden Verschiebungen durch den Vektor $\begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ erfasst wird.

Diese anschauliche Bedeutung motiviert die Einführung einer Verknüpfung auf der Menge der Vektoren:

(3.2) Definition

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren des \mathbb{R}^3 .

Dann heiße der Vektor $\vec{a} + \vec{b} := \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ *Summe der Vektoren \vec{a} und \vec{b}* .

Unter Verwendung der Vektorsumme kann der Satz (3.1) knapp und einprägsam formuliert werden:

(3.3) Bemerkung

Gegeben seien drei Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Nach der Einführung einer Addition auf der Menge der Vektoren, stellt sich natürlich sofort die Frage, ob mit dieser genauso algebraisch umgegangen werden kann wie mit der bekannten Addition reeller Zahlen.

Aus dem Algebra-Unterricht wissen wir, dass der „algebraische Umgang“ mit der Addition reeller Zahlen auf wenigen fundamentalen Regeln beruht. Im Folgenden überprüfen wir die Gültigkeit dieser Regeln für die Vektor-Addition.

(3.4) Satz

Die Vektor-Addition erfüllt das Kommutativgesetz:

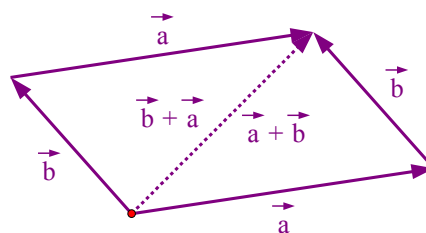
Es gilt $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ für je zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

Beweis:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$$

Das dritte Gleichheitszeichen benutzt das Kommutativgesetz für die Addition reeller Zahlen.

Im Anschauungsraum bedeutet Satz (3.4) die Kommutativität der Verkettung von Verschiebungen. Ihretwegen kann der Pfeil, der eine Verkettung zweier Verschiebungen repräsentiert, als Diagonale im Parallelogramm gewonnen werden:



Im Beweis von Satz (3.4) wird deutlich, dass sich die Gültigkeit des Kommutativ-Gesetzes von der Addition reeller Zahlen auf die Addition von Vektoren „vererbt“.



Das gleiche gilt für das Assoziativgesetz. Der entsprechende Nachweis des entsprechenden Satzes wird dem Leser zur Übung empfohlen.

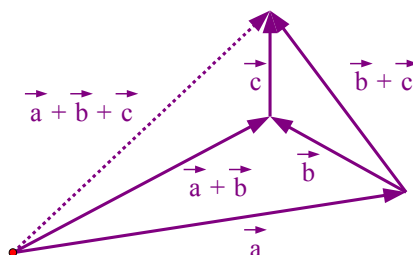
(3.5) Satz

Die Vektor-Addition erfüllt das Assoziativgesetz:

Es gilt $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ für je drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .

Während das Kommutativgesetz das Vertauschen von Summanden in einer Summe erlaubt, gestattet das Assoziativgesetz das Verändern der Additionsreihenfolge bei der Addition mehrerer Summanden.

Die zugehörige Aussage im Anschauungsraum besagt, dass das Verketteten von Verschiebungen assoziativ ist (Das ist übrigens bereits deswegen richtig, weil das Verketteten von Abbildungen immer assoziativ ist!).



In der Beschriftung der Grafik wird ausgenutzt, dass das Assoziativgesetz ein „Klammerspargesetz“ ist: Wenn die Verknüpfungsreihenfolge unerheblich ist, können Klammern, die die Reihenfolge vorschreiben, weggelassen werden!

Es stellt sich uns nun die Aufgabe, die „zur Addition gehörende“ Subtraktion von Vektoren zu erklären. Es ist mathematische Konvention, nach der Definition einer Addition den Namen „Subtraktion“ für die Operation zu vergeben, die sich als Umkehrung des Addierens ergibt.

In der Algebra ist die Differenz zweier Zahlen a und b als die eindeutig bestimmte Zahl $d \in \mathbb{R}$ erklärt, für die $a + d = b$ gilt. Die Differenz „ $b - a$ “ ist also die einzige Zahl, die für gegebene Zahlen a und b die Gleichung $a + x = b$ löst.

Zunächst stellen wir fest, dass auch für zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} die Vektorgleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ stets genau eine Lösung hat:

(3.6) Satz

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren des \mathbb{R}^3 .

Dann ist $\vec{d} := \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ der einzige Vektor \vec{d} , der die Gleichung $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b}$ erfüllt.

Beweis:

$$\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + d_1 \\ a_2 + d_2 \\ a_3 + d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + d_1 = b_1 \\ a_2 + d_2 = b_2 \\ a_3 + d_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 = b_1 - a_1 \\ d_2 = b_2 - a_2 \\ d_3 = b_3 - a_3 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

Die eindeutige Lösbarkeit der Vektorgleichung $\vec{a} + \vec{x} = \vec{b}$ ergibt sich also aus der eindeutigen Lösbarkeit der Zahlengleichung $a + x = b$.

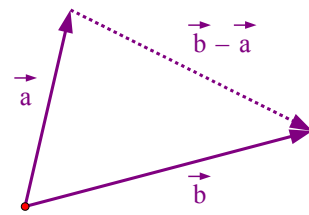
Nach dieser gedanklichen Absicherung definieren wir die Differenz zweier Vektoren:



(3.7) Definition

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren des \mathbb{R}^3 .

Dann heißt der Vektor $\vec{b} - \vec{a} := \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$ *Differenz* von \vec{a} und \vec{b} .



Die Skizze neben der Definition (3.7) erläutert, wie die Differenzbildung zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} anschaulich zu interpretieren ist. Beide Vektoren erzeugen im Anschauungsraum eine Verschiebung. Werden diese nun durch je einen Pfeil **mit gemeinsamem Anfangspunkt** repräsentiert, dann repräsentiert der Pfeil vom Zielpunkt des Subtrahenden \vec{a} zum Zielpunkt des Minuenden \vec{b} die Verschiebung, die zum Differenzvektor $\vec{b} - \vec{a}$ gehört.

Diese anschauliche Interpretation der Vektordifferenz wird für den Modellraum im ersten Teil der nachfolgenden Bemerkung ausformuliert. Im zweiten Teil wird erklärt, wie der durch zwei Punkte P und Q erzeugte Vektor \vec{PQ} mit Hilfe von Ortsvektoren dargestellt werden kann; diese Darstellung ist von großer praktischer Bedeutung.

(3.8) Bemerkung

(1) Gegeben seien drei Punkte $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$.

Dann gilt $\vec{RQ} - \vec{RP} = \vec{PQ}$.

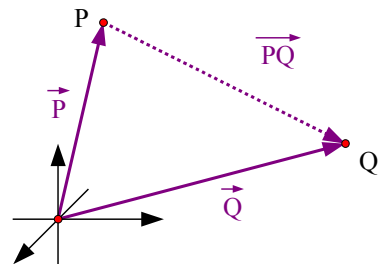
(2) Für je zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^3$ gilt $\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$.

Beweis:

(1) Es gilt nach Bemerkung (3.3) $\vec{RP} + \vec{PQ} = \vec{RQ}$.

Mit (3.6) und (3.7) folgt die Behauptung.

(2) folgt direkt aus (1), wenn für R der Ursprung O gesetzt wird!



In der Algebra der reellen Zahlen hat sich für den praktischen Umgang mit Differenzen als äußerst nützlich erwiesen, dass Subtraktionen als Additionen dargestellt werden können:

$$14 - 5 = 14 + (-5)$$

$$3 - (-2) = 3 + (-(-2)) = 3 + 2$$

Allgemein kann jede Subtraktion $b - a$ als Addition der „Gegenzahl“ $b + (-a)$ geschrieben werden. Um gleiches in der Vektor-Algebra zu ermöglichen, ist es offenbar sinnvoll, den Begriff „Gegenvektor“ zu erschaffen. Die folgende Zeile erinnert daran, wie in der Algebra der Zahlen die Gegenzahl $-a$ einer Zahl a charakterisiert ist:

$$a + (-a) = 0$$

Zur analogen Erklärung eines Gegenvektors benötigen wir also einen Vektor, der im Wesen der Zahl 0 entspricht. Dazu erinnern wir uns daran, worin das Auszeichnende der Zahl 0 besteht, so dass ausgerechnet sie verwendet wird, um den Begriff der Gegenzahl zu erklären:

$$a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad [^1]$$

Die Zahl 0 hat im Rahmen einer Addition keine Wirkung; sie ist „neutral“! Also müssen wir einen Vektor generieren, der als Summand keinen Einfluss auf eine Vektorsumme nimmt.

(3.9) Definition

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ heiße *Nullvektor*. Der Nullvektor wird mit $\vec{0}$ bezeichnet.

¹ Der „Quantor“ \forall steht als Abkürzung für „für alle“ (siehe auch §B: Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie)

(3.10) Bemerkungen

- (1) Ist P ein Punkt des Modellraumes \mathbb{R}^3 , so gilt $\vec{0} = \overrightarrow{PP}$.
 (2) Ist \vec{a} ein Vektor, so gilt $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

Beweise :

$$(1) \overrightarrow{PP} = \begin{pmatrix} p_1 - p_1 \\ p_2 - p_2 \\ p_3 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$(2) \vec{a} + \vec{0} = \begin{pmatrix} a_1 + 0 \\ a_2 + 0 \\ a_3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

Die erste Bemerkung sagt aus, dass die zum Nullvektor gehörende Verschiebung „nichts bewegt“, sondern alle Punkte auf sich selbst abbildet.

Der zweiten Bemerkung zufolge hat der Nullvektor die gleiche algebraische Eigenschaft bezüglich der Addition von Vektoren wie die Zahl 0 bezüglich der Addition von reellen Zahlen.

Nach der erfolgreichen Einführung des Nullvektors steht der Definition des Gegenvektors nicht mehr im Wege:

(3.11) Definition

Gegeben sei ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$. Dann heißt der Vektor $\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$ *Gegenvektor des Vektors* \vec{a} .

Der Gegenvektor von \vec{a} wird mit $-\vec{a}$ bezeichnet.

Aus den Definitionen (3.9) und (3.11) ergeben sich strukturell altbekannte Rechenregeln:

(3.12) Bemerkungen

- (1) Seien P und Q Punkte des Modellraumes \mathbb{R}^3 . Dann gilt $-\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$.
 (2) Für jeden Vektor \vec{a} gilt $-(-\vec{a}) = \vec{a}$.
 (3) Für jeden Vektor \vec{a} gilt $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
 (4) Für jeden Vektor \vec{a} gilt $-\vec{a} = \vec{0} - \vec{a}$.
 (5) Für je zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt $-(\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} + (-\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$.

Beweise:

$$(1) -\overrightarrow{PQ} = -\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(q_1 - p_1) \\ -(q_2 - p_2) \\ -(q_3 - p_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \\ p_3 - q_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{QP}$$

$$(2) -(-\vec{a}) = -\begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-a_1) \\ -(-a_2) \\ -(-a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \vec{a}$$

$$(3) \vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + (-a_1) \\ a_2 + (-a_2) \\ a_3 + (-a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

(4) folgt direkt aus (3) mit Definition (3.7) und Bemerkung (3.8).

(5) zur Übung empfohlen!



Im Anschauungsraum bedeutet die erste Bemerkung, dass sich die zum Gegenvektor gehörende Verschiebung durch „Umorientieren“ der ursprünglichen Verschiebung ergibt.

Die zweite Bemerkung zeigt, dass das Gegenvektor-Bilden wie das Verneinen ein „idempotenter“ Prozess ist: Der Gegenvektor vom Gegenvektor ist der ursprüngliche Vektor.

Die dritte Bemerkung bestätigt, dass ein Gegenvektor sich algebraisch so wie eine Gegenzahl verhält: Wird er zum ursprünglichen Vektor addiert, entsteht der Vektor, der in einer Summe wirkungslos ist, nämlich den Nullvektor.

Die vierte Bemerkung folgert daraus, dass der Gegenvektor durch Subtraktion vom Nullvektor gebildet werden kann.

In der fünften Bemerkung wird schließlich festgestellt, dass die Prozesse „Addieren“ und „Gegenvektor-Bilden“ miteinander verträglich sind: Der Gegenvektor einer Summe ist die Summe der Gegenvektoren.

Nach diesen Vorbereitungen kann die Differenz zweier Vektoren als Addition des Gegenvektors ausgedrückt werden:

(3.13) Satz

Gegeben seien zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Dann gilt $\vec{b} - \vec{a} = \vec{b} + (-\vec{a})$.

Beweis:

$$\vec{a} + (\vec{b} + (-\vec{a})) = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{a} + (-\vec{a}) + \vec{b} = (\vec{a} + (-\vec{a})) + \vec{b} = \vec{0} + \vec{b} = \vec{b}$$

Nach Satz (3.6) und Definition (3.7) muss der Vektor $\vec{b} + (-\vec{a})$ mit dem Vektor $\vec{b} - \vec{a}$ übereinstimmen.

Der Satz (3.13) wird sofort angewandt, um eine weitere in die Sammlung (3.12) gehörende Rechenregel zu beweisen:

(3.14) Bemerkung

Für je zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt $-(\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b}$.

Beweis :

$$\begin{aligned} -(\vec{b} - \vec{a}) &= -(\vec{b} + (-\vec{a})) && \text{[s. (3.13)]} \\ &= -\vec{b} + (-(-\vec{a})) && \text{[s. (3.12)(5)]} \\ &= -\vec{b} + \vec{a} && \text{[s. (3.12)(2)]} \\ &= \vec{a} + (-\vec{b}) && \text{[s. (3.4)]} \\ &= \vec{a} - \vec{b} && \text{[s. (3.13)]} \end{aligned}$$

Die Bemerkung (3.14) garantiert zusammen mit Bemerkung (3.12)(5), dass bei der Subtraktion einer Differenz die Klammern in gewohnter Weise aufgelöst werden dürfen:

$$\vec{c} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} \qquad \vec{c} - (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{c} - \vec{a} + \vec{b}$$

Es lässt sich übrigens nirgendwo ein struktureller Unterschied zwischen Addition sowie Subtraktion von Vektoren und den entsprechenden Verknüpfung der reellen Zahlen feststellen. Die Ursache hierfür liegt darin, dass beide Additionen die gleichen Grundgesetze erfüllen und die Subtraktionen völlig analog aus den Additionen hervorgehen.

Mathematiker erkannten, dass es außer den reellen Zahlen und den Vektoren weitere Objektgruppen mit Verknüpfungen gibt, die auf denselben Grundgesetzen aufbauen und deshalb gleich strukturiert sind. In ihrem Bestreben nach Verallgemeinerung erschufen sie deshalb die abstrakte Theorie der „Gruppen“, in der unabhängig von der jeweiligen Objektmenge und der speziellen Verknüpfung untersucht wird, welche Folgerungen sich aus der Gültigkeit der wenigen Grundgesetze, den sogenannten „Gruppenaxiomen“ ziehen lassen.

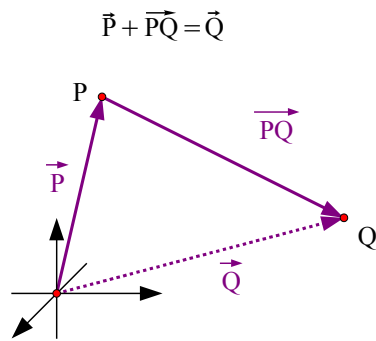
Diese Folgerungen gelten für jede Gruppe, sodass sich die Mathematik bei der Untersuchung einer speziellen Gruppe auf deren Besonderheiten konzentrieren darf.



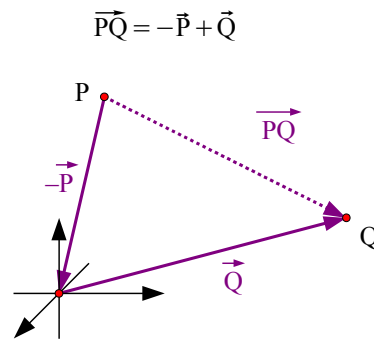
Wegen ihrer immensen praktischen Bedeutung werden die folgenden Bemerkungen formuliert, die eigentlich nur Spezialfälle der Bemerkung (3.3) bzw. Umformulierungen der Bemerkung (3.8)(2) darstellen. Schon in den Übungen zu diesem Paragraphen werden sie sich nützlich erweisen.

(3.15) Bemerkungen

Für je zwei Punkte P und Q des Modellraumes \mathbb{R}^3 gilt:



Berechnung der Koordinaten von Q
mit Hilfe von \vec{P} und \vec{PQ}



Algebraische Auftrennung des Vektors \vec{PQ}
in die Ortsvektoren \vec{P} und \vec{Q}

Die erste Bemerkung sagt, dass die Koordinaten des Ortsvektors eines Punktes Q durch simple Addition erhältlich sind, wenn die Koordinaten des Ortsvektors eines Punktes P und die Koordinaten des Vektors \vec{PQ} bekannt sind.

Die zweite Bemerkung zeigt, wie aus den Ortsvektoren zweier Punkte P und Q der Vektor \vec{PQ} berechnet wird.

Es erleichtert das Verständnis der weiteren Theorieentwicklung erheblich, wenn die beiden Beziehungen

- $\vec{P} + \vec{PQ} = \vec{Q}$
- $\vec{PQ} = -\vec{P} + \vec{Q}$

sowie ihre Veranschaulichungen stets gedanklich präsent sind. Viele zukünftige Beweisführungen werden (kommentarlos!) reichlichen Gebrauch von ihnen machen!