



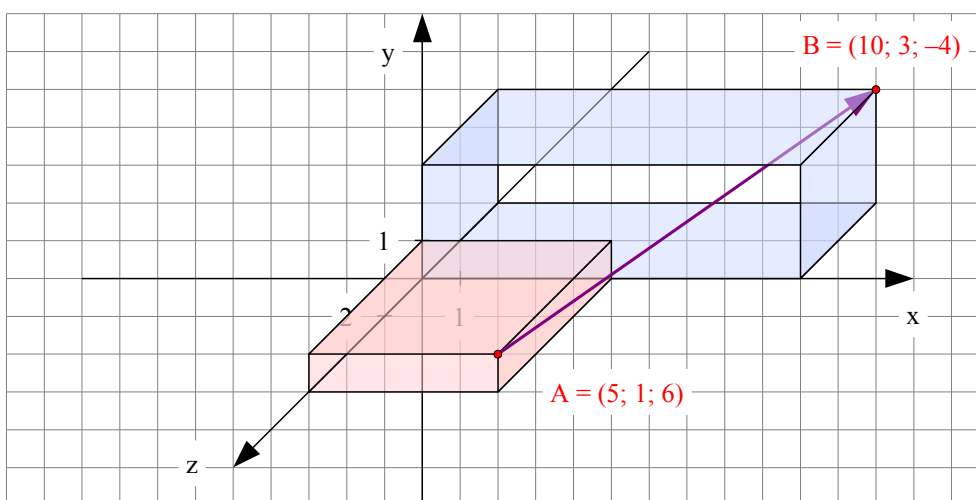
§2 Vektoren

Um aus der amorphen Masse der Raumpunkte des Modellraums geometrische Strukturen zu formen, benötigen wir eine Methode, mit der wir die räumliche Beziehung beschreiben können, in der je zwei Punkte $A = (a_1; a_2; a_3)$ und $B = (b_1; b_2; b_3)$ zueinander stehen. Die Leitfragen für die Entwicklung einer solchen Methode lauten:

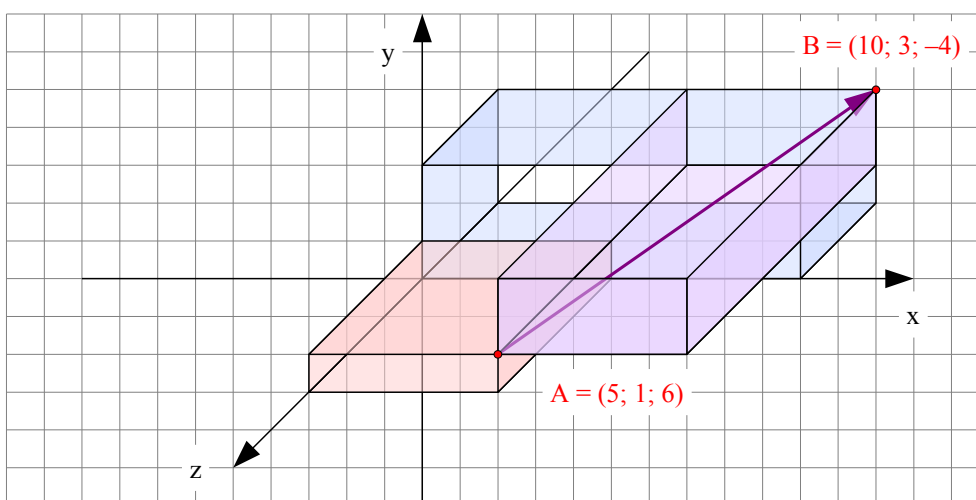
- (1) Wie kann die Ortsänderung vom Punkt A zum Punkt B im Anschauungsraum dargestellt werden?
- (2) Wie lässt sich diese Ortsänderung im Modellraum rechnerisch nachbilden?
- (3) Wie ist diese Arithmetisierung wiederum im Anschauungsraum zu deuten?

Die drei Fragen erörtern wir mit Hilfe eines Zahlenbeispiels: $A = (5; 1; 6)$ und $B = (10; 3; -4)$.

Im Hinblick auf die **erste Frage** ist es naheliegend, im Anschauungsraum die „Ortsänderung“ von A nach B durch einen Pfeil¹ geometrisch darzustellen, der A als Anfangs- und B als Zielpunkt besitzt:

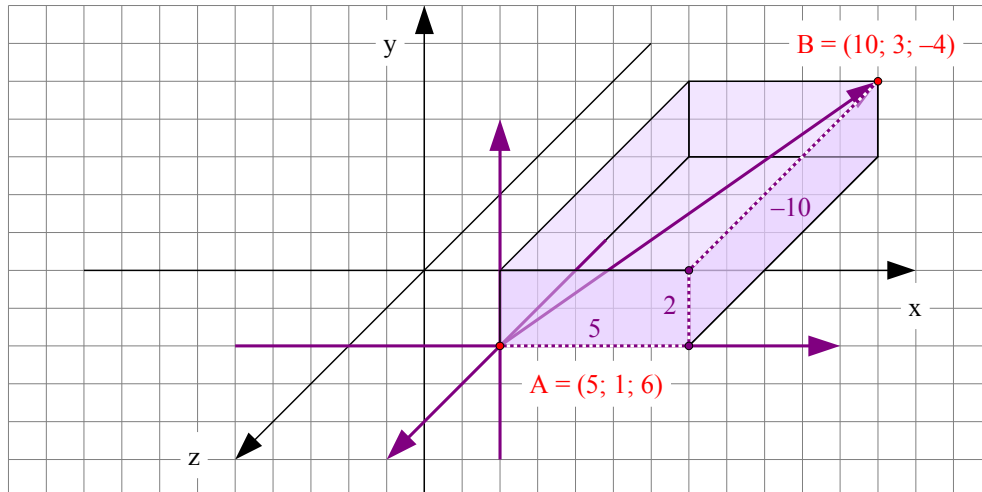


Der Pfeil von A nach B wird mit einem Quader umhüllt, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen:



Nun denken wir uns ein neues Koordinatensystem, dessen Ursprung im Punkt A liegt, und dessen Koordinatenachsen durch die von A ausgehenden Kanten des „Pfeilquaders“ (und damit parallel zu den Achsen des alten Systems) verlaufen. Die Achsen seien in gleicher Weise bezeichnet, normiert und orientiert.

¹ In der Euklidischen Geometrie wird unter einem „Pfeil“ eine orientierte Strecke verstanden; die Orientierung entsteht, indem bei den Endpunkten der Strecke zwischen Anfangs- und Zielpunkt unterschieden wird.



In diesem neuen Koordinatensystem ist der Pfeilquader offensichtlich der Koordinatenquader für B.

Zur Beantwortung der **zweiten Frage** seien $(x_1; x_2; x_3)$ die Koordinaten von B in dem neuen Koordinatensystem mit dem Ursprung A. Weil $A = (5; 1; 6)$ gilt, müssen sich dann die Koordinaten von B im ursprünglichen Koordinatensystem wie folgt schreiben lassen:

$$B = (10; 3; -4) = (5 + x_1; 1 + x_2; 6 + x_3)$$

Also ergeben sich die Koordinaten von B in dem neuen System als Differenzen der Koordinaten von B und A:

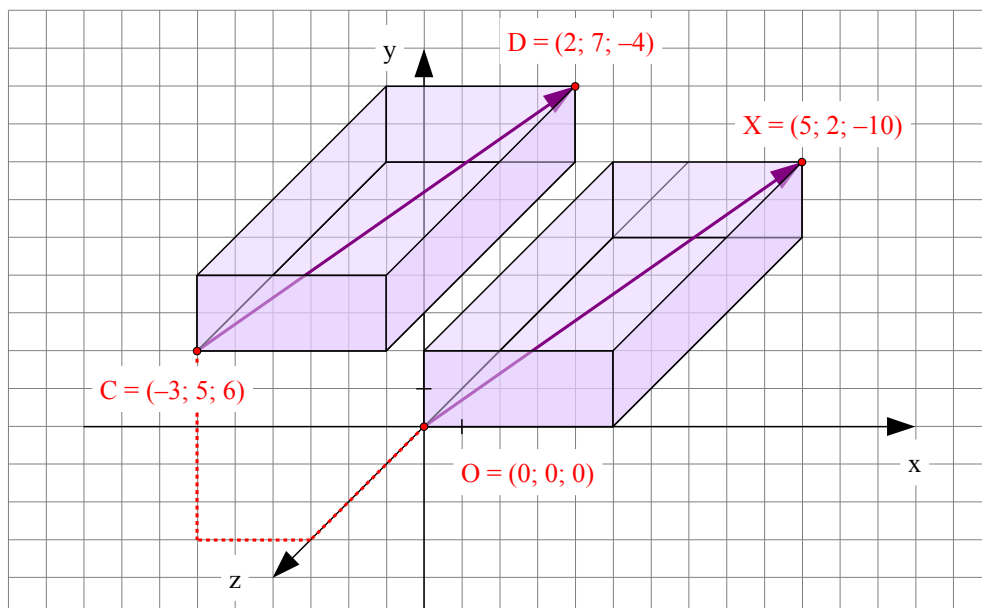
$$(x_1; x_2; x_3) = (10 - 5; 3 - 1; -4 - 6) = (5; 2; -10).$$

Das Tripel der Differenzen $(5; 2; -10)$ beschreibt also den Ort, den der Punkt B bezüglich des Punktes A einnimmt.

Nun rücken wir die **dritte Frage** ins Blickfeld. Dazu ist zunächst festzustellen, dass das Tripel $(5; 2; -10)$ nicht nur die Ortsänderung von A nach B, sondern beispielsweise auch die Ortsänderung vom Punkt $C := (-3; 5; 6)$ zum Punkt $D := (2; 7; -4)$ oder vom Ursprung $O := (0; 0; 0)$ zum Punkt $X := (5; 2; -10)$ beschreibt. Es gilt nämlich:

$$(5; 2; -10) = (2 - (-3); 7 - 5; -4 - 6)$$

$$(5; 2; -10) = (5 - 0; 2 - 0; -10 - 0)$$

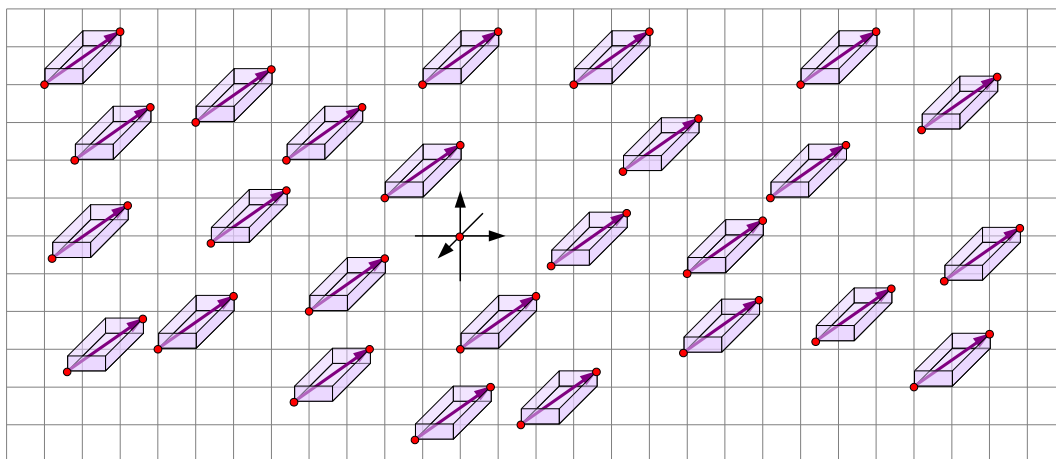




Diese beiden weiteren willkürlich gewählten Beispiele verdeutlichen, dass es sogar unendlich viele Paare von Punkten mit der Eigenschaft gibt, für die das Tripel $(5; 2; -10)$ die „Ortsänderung“ von einem zu anderen beschreibt:

Zu jedem Punkt $P = (p_1; p_2; p_3)$ gibt es genau einen Punkt $Q = (q_1; q_2; q_3)$, sodass das Tripel $(5; 2; -10)$ die „Ortsänderung“ von P nach Q beschreibt, nämlich $Q = (p_1 + 5; p_2 + 2; p_3 - 10)$.

Das Tripel $(5; 2; -10)$ der Differenzen der Koordinaten der Punkte A und B beschreibt also nicht nur eine isolierte „Ortsänderung“ von A nach B , sondern eine Abbildung **aller** Punkte des Modellraumes auf einen jeweils eindeutig bestimmten Partner.



In einem Anhang zu diesem Paragraphen wird mit Methoden der Euklidischen Geometrie gezeigt, dass diese Abbildung die Definitionskriterien einer „Verschiebung“ erfüllt.

Bevor wir den heuristischen Überlegungen durch Definitionen für den Modellraum offiziellen Charakter verleihen, ist zu beachten, dass das Tripel $(5; 2; -10)$ für den Anschauungsraum momentan zweierlei Bedeutung hat. Einerseits wird es als ein fester Punkt X interpretiert, andererseits erzeugt es eine Abbildung aller Punkte.

Um von vornherein deutlich zu machen, welche Interpretation jeweils zur Zeit gemeint ist, wird das Tripel zukünftig nicht als Zeile $(5; 2; -10)$, sondern als Spalte $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ geschrieben, wenn es nicht als Punkt, sondern als Erzeuger einer Verschiebung gedeutet werden soll.

(2.1) Definition

Ein Tripel reeller Zahlen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ heiße *Vektor* des Modellraumes \mathbb{R}^3 , wenn es als Erzeuger der Abbildung gedeutet werden soll, die jedem Raumpunkt $A = (a_1; a_2; a_3)$ den Bildpunkt $A' = (a_1 + x_1; a_2 + x_2; a_3 + x_3)$ zuordnet. Der Vektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ wird abkurzend mit \vec{x} [gelesen: „Vektor-x“] bezeichnet.

Die Zahlen x_1, x_2, x_3 heißen *Komponenten* oder auch *Koordinaten des Vektors*.²
Die Abbildung, von der hier die Rede ist, heiße *vom Vektor \vec{x} erzeugte Translation des Raumes*.

² Die Definition von Vektoren im Modellraum \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^n erfolgt vollig analog. Auch im folgenden werden alle Definitionen nur im \mathbb{R}^3 vorgenommen, wenn die Ubertragbarkeit auf den \mathbb{R}^n offensichtlich ist.



(2.2) Definition

Sind $A = (a_1; a_2; a_3)$ und $B = (b_1; b_2; b_3)$ zwei Punkte im \mathbb{R}^3 , so heiße der Vektor $\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

durch die Punkte A und B definierter Vektor; er wird mit \vec{AB} [gelesen: „Vektor-A-B“] bezeichnet.

Mit diesen Begriffsbildungen und Bezeichnungen kann die Funktionsweise der vom Vektor \vec{x} erzeugten Translation knapp beschrieben werden:

(2.3) Satz

Ist \vec{x} ein Vektor, so gibt es zu jedem Punkt A im \mathbb{R}^3 genau einen Punkt B im \mathbb{R}^3 , sodass $\vec{x} = \vec{AB}$ gilt.

Beweis:

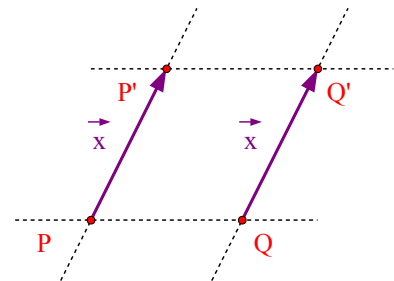
Ein Punkt B erfüllt genau dann die genannte Bedingung, wenn $\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{x}$ gilt.

Da aber die Gleichungen $b_1 - a_1 = x_1$ $b_2 - a_2 = x_2$ $b_3 - a_3 = x_3$ nur die Lösungen $b_1 = a_1 + x_1$ $b_2 = a_2 + x_2$ $b_3 = a_3 + x_3$ besitzen, ist der Punkt

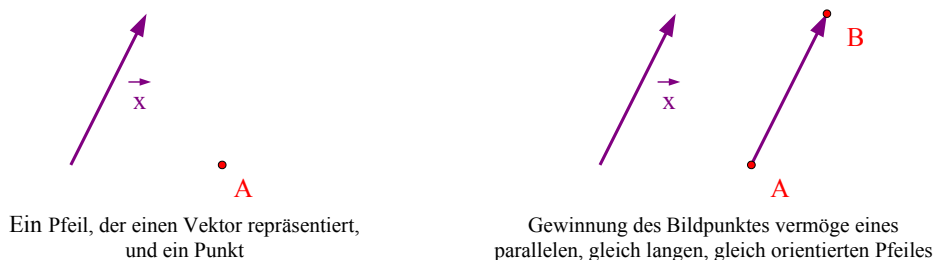
$B = (a_1 + x_1; a_2 + x_2; a_3 + x_3)$ der einzige, der die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Weiter oben wurde schon angemerkt, dass ein Anhang zu diesem Paragraphen erläutern wird, weshalb eine von einem Vektor erzeugte Translation des Modellraumes – als Abbildung im Anschauungsraum interpretiert – die Definitionskriterien der Verschiebungen erfüllt. Das bedeutet:

- Werden im Anschauungsraum zwei Punkte P und Q durch Pfeile mit ihren Bildpunkten P' und Q' verbunden (wobei der Punkt Q außerhalb der Geraden PP' liegen möge), so bilden die beiden Pfeile ein Parallelogramm $PQQ'P'$ (oder mit umgekehrten Umlaufsinn $QPP'Q'$).
- Die beiden Pfeile \vec{PP}' und \vec{QQ}' sind daher parallel, gleich lang und gleich „orientiert“ (Die Gleichorientierung ergibt sich sowohl aus dem Umlauf von $PQQ'P'$ als auch aus dem von $QPP'Q'$!).
- Unter Zuhilfenahme eines dritten Hilfspunktes R , der außerhalb der Geraden PP' zu wählen ist, kann gezeigt werden, dass die zweite Aussage auch gilt, wenn der Punkt Q auf der Geraden PP' liegt.



Die durch einen Vektor im Anschauungsraum erzeugte Verschiebung bildet **alle** existierenden Punkte ab. Wir stellen uns vor, dass an jedem Punkt ein Pfeil angreift, der diesen Punkt zu seinem Bildpunkt schiebt. Alle diese Pfeile sind untereinander parallel, gleich lang und im oben erläuterten Sinn gleich orientiert. Jeder dieser Pfeile **repräsentiert** die Verschiebung und damit den Vektor im Anschauungsraum:



Wenn wir zukünftig von einem *Repräsentanten eines Vektors im Anschauungsraum* sprechen, ist ein Pfeil gemeint, der einen Originalpunkt mit seinem Bildpunkt (vermöge der durch den Vektor erzeugten Verschiebung) verbindet.



Im Anschauungsraum kann mit Hilfe eines Kongruenzsatzes gezeigt werden, dass ein Viereck, das aus zwei parallelen, gleich langen und gleich orientierten Pfeilen gebildet wird, immer ein Parallelogramm sein muss. Konkret bedeutet das, dass auch die beiden anderen Seiten parallel (und gleich lang) sein müssen.

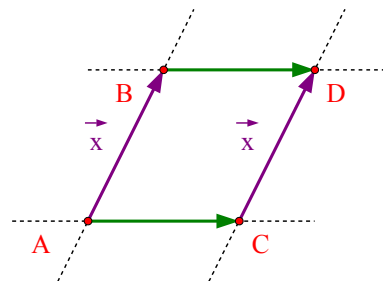
Die nächste Bemerkung zeigt, wie dieser Sachverhalt im Modellraum mit Hilfe von Vektoren elegant formuliert werden kann. Der zugehörige Beweis ist – anders als der Kongruenzbeweis im Anschauungsraum – erstaunlich simpel.

(2.4) Bemerkung

Sind $A, B, C, D \in \mathbb{R}^3$ vier Raumpunkte, für die $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ gilt, dann gilt auch $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - c_1 \\ d_2 - c_2 \\ d_3 - c_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \\ b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \\ b_3 - a_3 = d_3 - c_3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 - a_1 = d_1 - b_1 \\ c_2 - a_2 = d_2 - b_2 \\ c_3 - a_3 = d_3 - b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 - b_1 \\ d_2 - b_2 \\ d_3 - b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} \end{aligned}$$



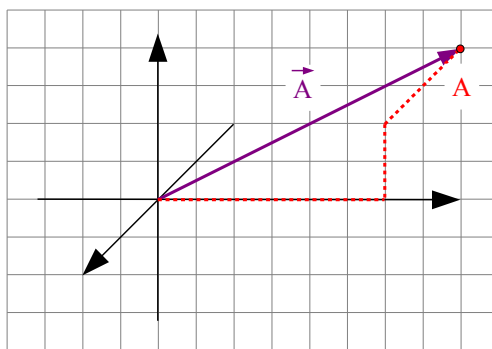
Den Schluss dieses Paragraphen bildet die Einführung von „Ortsvektoren“. Der Begriff des Ortsvektors ist von enormer Tragweite; er ermöglicht es uns, Punkte vektoriell zu erfassen:

(2.4) Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^3$ mit $A = (a_1; a_2; a_3)$ ein Punkt und $O := (0; 0; 0)$ der Ursprung.

Dann heiße der Vektor $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \\ a_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ Ortsvektor des Punktes A .

Der Ortsvektor eines Punktes A wird kurz mit \vec{A} [gelesen: „Vektor-A“] bezeichnet³.



Ein Punkt A und sein Ortsvektor \vec{A} haben dieselben Koordinaten. Deswegen erzeugt der Ortsvektor von A diejenige Translation, die den Ursprung O auf den Punkt A abbildet.

³ Die hier gewählte Bezeichnungswiese für Ortsvektoren ist in der Schulbuchliteratur ungewöhnlich, aber aus mehreren Gründen elegant und äußerst praktisch:

- Die Bezeichnung kommt ohne einen Index aus. In der Schulbuchliteratur werden in der Regel umständliche Bezeichnungenswisen wie beispielsweise \vec{T}_A oder \vec{x}_A verwendet.
- Die MatheBellus-Schreibweise erinnert daran, dass ein Punkt und sein Ortsvektor durch völlig identisches Zahlenmaterial beschrieben sind. Wenn die Komponenten eines Ortsvektors bekannt sind, so auch die Koordinaten des zugehörigen Punktes. Das erspart viel Schreibarbeit.



Anhang zu §2

In diesem Anhang wird nachträglich erläutert, warum eine Abbildung, die im \mathbb{R}^3 durch einen Vektor erzeugt wird, im Euklidischen Anschauungsraum den Definitionsbedingungen der Verschiebungen genügt.

Der Hauptaufwand besteht darin, diese Definitionsbedingungen zu rekonstruieren. Hierzu ist es nützlich, sich zu vergewissern, dass der folgende aus der Geometrie der Ebene bekannte Sachverhalt auch im Raum gültig ist.

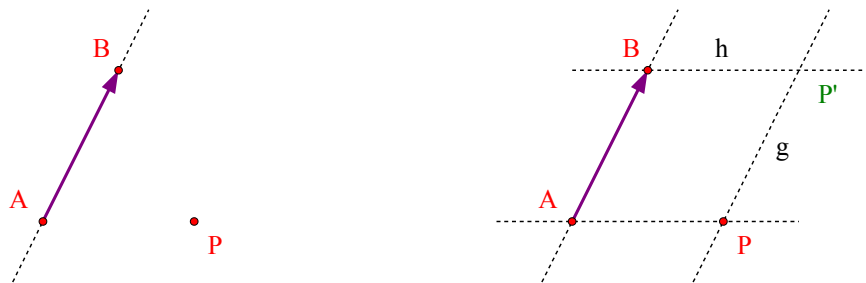
(A2.1) Vorbereitungssatz

Gegeben sei ein Pfeil \overrightarrow{AB} im Anschauungsraum sowie ein Punkt P , der nicht auf der Pfeilgeraden AB liegt.

Dann gibt es genau einen Punkt P' , der das Dreieck APB zu einem Parallelogramm $APP'B$ ergänzt, das heißt, für den die folgenden Konstruktionsbedingungen erfüllt sind:

- (1) $PP' \parallel AB$
- (2) $BP' \parallel AP$

Der Punkt P' liegt ebenfalls außerhalb der Pfeilgeraden AB .



Beweis:

Die drei Punkte A , B und P legen eine Euklidische Ebene fest. Den Euklidischen Axiomen zufolge gibt es in dieser Ebene genau eine Parallele g zur Geraden AB , die durch P verläuft, und genau eine Parallele h zur Geraden AP , die durch B verläuft.

g und h können nicht parallel sein, weil andernfalls h dann auch parallel zu AB sein oder mit AB übereinstimmen müsste. Weil B auf h liegt, müsste $h = AB$ gelten und damit auch den Punkt A enthalten. Das steht im Widerspruch dazu, dass h als Parallele von AP keinen gemeinsamen Punkt mit AP haben kann.

g und h können auch nicht identisch sein, weil andernfalls B auf g läge. Als Parallele von AB kann aber g keinen Punkt von AB enthalten.

Weil also g und h weder parallel noch identisch sind, müssen sie sich in genau einem Punkt P' schneiden. Weil g parallel zur Pfeilgeraden AB verläuft, muss P' außerhalb von AB liegen.

Der vielversprechende Vorbereitungssatz (A2.1) liefert allerdings noch keine vollständige Abbildungsvorschrift, die den gesamten Raum erfasst, weil er nichts darüber aussagt, wie zu einem Punkt P , der **auf** der Pfeilgeraden AB liegt, der Bildpunkt P' zu konstruieren sei.

Für solche Punkte ist die Konstruktionsvorschrift aus dem Vorbereitungssatz wegen der Übereinstimmung der Geraden AB und AP nicht anwendbar. Dieses Problem überwinden wir mit einem „Trick“. Dieser besteht in einem Hilfspfeil, der außerhalb der Pfeilgeraden AB gelegen ist (siehe Abbildung auf der nächsten Seite).

(A2.2) Ergänzung des Vorbereitungssatzes

Gegeben sei ein Pfeil \overrightarrow{AB} im Anschauungsraum sowie ein Punkt P , der **auf** der Pfeilgeraden AB liegt.

Sei Q ein beliebiger Punkt, der **nicht auf** der Pfeilgeraden liegt, und Q' der eindeutig bestimmte Punkt, der gemäß Vorbereitungssatz (A2.1) das Dreieck AQB zu einem Parallelogramm $AQQ'B$ ergänzt.

Sei P' der eindeutig bestimmte Punkt, der gemäß Vorbereitungssatz (A2.1) das Dreieck QPQ' zu einem Parallelogramm $QPP'Q'$ ergänzt. Für P' gilt:

- (1) P' liegt auf der Pfeilgeraden AB .
- (2) P' ist unabhängig von der Wahl des Punktes Q .



Nach diesen Vorbereitungen ist es uns möglich, eine Definition für pfeil-erzeugte Verschiebungen zu verfassen:

(A2.3) Definition („Verschiebung“)

Gegeben sei ein Pfeil \overrightarrow{AB} im Anschauungsraum. Dann sei die durch diesen Pfeil erzeugte Verschiebung diejenige Abbildung, die jedem Raumpunkt P nach folgender Vorschrift genau einen Bildpunkt P' zuordnet:

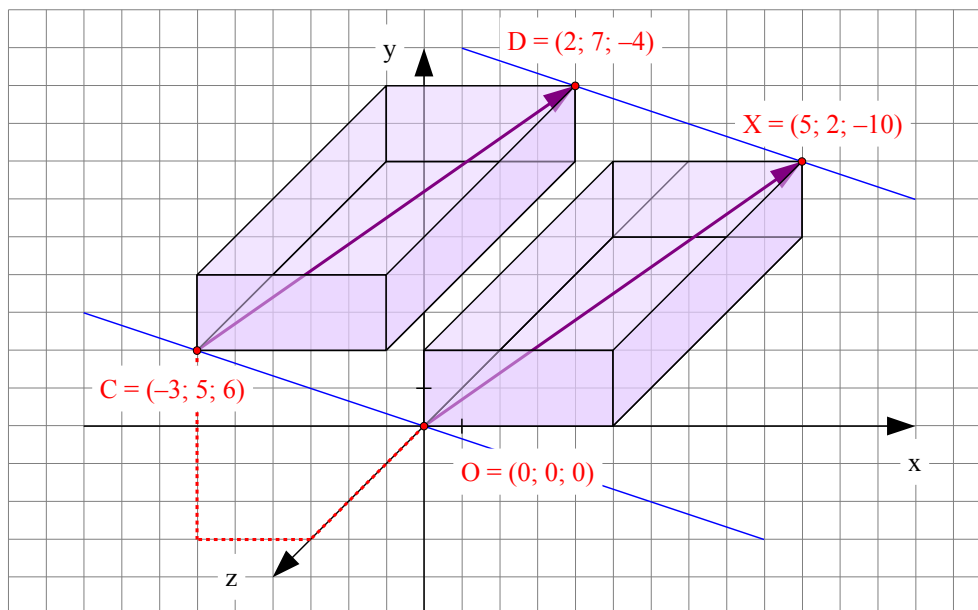
- (1) Liegt P **nicht auf** der Pfeilgeraden AB , dann sei P' der gemäß Vorbereitungssatz (A2.1) eindeutig bestimmte Punkt P' , der das Dreieck APB zu einem Parallelogramm $APP'B$ ergänzt.
- (2) Liegt P **auf** der Pfeilgeraden AB und ist P von A verschieden, dann sei P' der gemäß Ergänzung (A2.2) zum Vorbereitungssatz eindeutig bestimmte Punkt P' , der mit Hilfe eines nicht auf der Pfeilgeraden liegenden Hilfspunktes Q konstruiert wird.

Im Folgenden zeigen wir anhand eines Beispiels, dass die von der Positionsänderung $(5; 2; -10)$ erzeugte Abbildung den Bedingungen der soeben verfassten Definition (A2.3) genügt.

Dazu werden im Anschauungsraum zwei Pfeile betrachtet, die jeweils zu einem Punktepaar gehören, bei denen der zweite Partner vermöge der Positionsänderung $(5; 2; -10)$ aus dem ersten hervorgeht:

1. Pfeil: \overrightarrow{OX} mit $O = (0; 0; 0)$ und $X = (0 + 5; 0 + 2; 0 - 10) = (5; 2; -10)$
2. Pfeil: \overrightarrow{CD} mit $C = (-3; 5; 6)$ und $X = (-3 + 5; 5 + 2; 6 - 10) = (2; 7; -4)$

Die folgende Zeichnung zeigt die beiden Pfeile mit den sie umhüllenden achsenparallelen Pfeilquadrern.



Kann nun nachgewiesen werden, dass das Viereck $COXD$ ein Parallelogramm ist, dann ist der Punkt D der Bildpunkt vom Punkt C vermöge der Verschiebung, die durch den Pfeil \overrightarrow{CD} erzeugt wird, und umgekehrt der Punkt X der Bildpunkt vom Punkt O vermöge der Verschiebung, die durch den Pfeil \overrightarrow{OX} erzeugt wird.

Um den gewünschten Nachweis zu führen, benötigen wir ein handliches Kriterium, mit dessen Hilfe ein Viereck als Parallelogramm nachgewiesen werden kann. Hier ist es:

(A2.4) Erkennungsmerkmal für Parallelogramme

Sind in einem Viereck zwei gegenüber liegende Seiten parallel und gleich lang, dann handelt es sich bei dem Viereck um ein Parallelogramm.

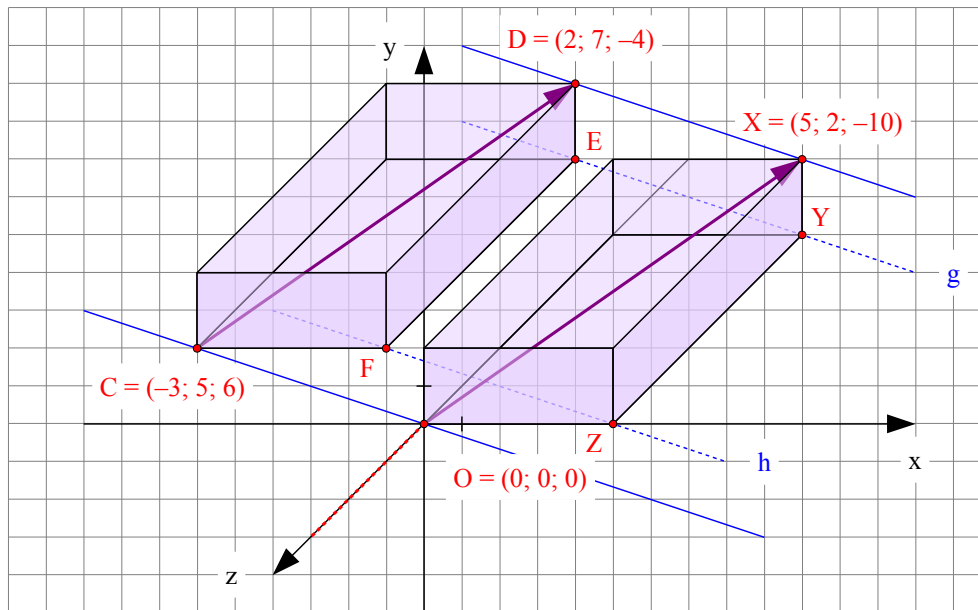


Zum Beweis:

Da zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks als parallel vorausgesetzt werden, muss das Viereck eben sein. Also gelten die Kongruenzsätze für Dreiecke.

Nun kann mit Hilfe Kongruenzsatzes SWS unter Zuhilfenahme des Wechselwinkelsatzes leicht gezeigt werden, dass die in dem Erkennungsmerkmal formulierte Behauptung korrekt ist.

Zwecks Anwendung des Erkennungsmerkmals auf das Viereck COXD zeigen wir nun, dass die Seiten \overline{CO} und \overline{DX} parallel und gleich lang sind.



Die Hilfsgerade g verlaufe durch die Koordinatenquader-Eckpunkte E und Y , die „unterhalb“ der Eckpunkte D und X liegen. Weil die Quaderkanten \overline{ED} und \overline{YX} parallel und gleich lang sind, muss nach Erkennungsmerkmal (A2.4) das Viereck $EYXD$ ein Parallelogramm sein.

Mit gleicher Argumentation erweisen sich das Viereck $FZYE$ und das Viereck $COZF$ als Parallelogramme. Daraus folgt aber durch schrittweise Übertragung, dass die Strecken \overline{OX} und \overline{CD} parallel und gleich lang sein müssen.

Also ist das Viereck $COXD$ ein Parallelogramm und damit die Abbildung, die durch die Ortsänderung $(5; 2; -10)$ erzeugt wird, eine Verschiebung im Sinne von Definition (A2.3).

Anmerkung:

Bei der hier gegebenen Auswahl der beiden Pfeile \overrightarrow{OX} und \overrightarrow{CD} liegt weder der Punkt C auf der Geraden OX , noch der Punkt O auf der Geraden CD . Fälle, in denen der Anfangspunkt eines Pfeils auf der Pfeilgeraden des anderen Pfeils liegt, können aber mit Hilfe eines dritten außerhalb der Pfeilgeraden liegenden Hilfspfeils in zwei Schritten nach dem oben beschriebenen Verfahren erledigt werden.

(A2.5) Verallgemeinertes Ergebnis

Gegeben sei ein Zahlentripel $(x_1; x_2; x_3)$.

Dann ist die Abbildung, die jedem Punkt $A = (a_1; a_2; a_3)$ des (mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen) Anschauungsraumes den Punkt $A' = (a_1 + x_1; a_2 + x_2; a_3 + x_3)$ zuordnet, eine Verschiebung im Sinne der Definition (A2.3).