



§1 Der Modellraum

A. Modell und Wirklichkeit

Die Geometrie ist die mathematische Disziplin, die sich der Erforschung des Phänomens „Raum“ widmet. Ihr Ziel ist es, die Beziehungen zwischen unterscheidbaren Orten wahrnehmungsgetreu zu erfassen, schlussfolgerndem Denken zugänglich zu machen und Verfahren für ihre Berechnung zu entwickeln.

Der Raum ist ein Phänomen, das von uns Menschen nur indirekt erfasst werden kann. Wir können lediglich Materie direkt wahrnehmen.

„Raum“ erfahren wir durch Anordnungen und Verteilungen von Materie. „Raum“ entsteht also dadurch, dass die Materie Strukturen bildet. Der Raum ist selbst „nichts“; er resultiert aus der Eigenschaft der Materie, kein „gleichförmiger Brei“ zu sein.

Raum ist daher existentiell unauflöslich mit Materie verbunden. Ohne Materie gibt es keinen Raum! Nur die Materie erzeugt das „hier“ und „dort“, das heißt, die Möglichkeit, Orte voneinander unterscheiden zu können.

Schon in der Geometrie des Altertums wurden zur Erforschung des Raumes gedankliche Objekte (Punkte, Geraden, Kreise, Figuren, Ebenen, Kugeln, Polyeder usw.) gebildet und untersucht. Diese Objekte vergegenständlichen die Vorstellung vom Raum. In der klassischen Geometrie (*Euklidische Geometrie*) wird ihr Wesen allerdings nicht „explizit“ (direkt, ausdrücklich), sondern „implizit“ (indirekt, nicht ausdrücklich) über die Festlegung ihrer wechselseitigen Beziehungen erklärt. Beispielsweise schreibt Euklid¹ nirgendwo in seinem Werk „Die Elemente“, was genau ein „Punkt“ oder eine „Gerade“ sei. Stattdessen formuliert er zwei Axiome², die zum Fundament seiner Theorie gehören:

- „Durch je zwei verschiedene Punkte verläuft genau eine Gerade.“
- „Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt.“

Die ägyptischen Erfinder der ebenen Geometrie und die griechischen Gelehrten, die sie ordneten, glaubten, mit ihrer Wissenschaft unmittelbar die Wirklichkeit der Ortsbeziehungen auf der Erdoberfläche zu erfassen. In Kenntnis der kugelförmigen Gestalt der Erde wissen wir seit Generationen, dass sie sich irrten. War die ägyptische Wissenschaft deshalb falsch? Die Antwort heißt weder „ja“ noch „nein“, denn die Frage ist falsch gestellt! Versteht man die Geometrie nicht als getreue Wiedergabe der Wahrheit, sondern nur als MODELL der Wirklichkeit, so kann sie nicht wahr oder falsch sein; sie soll nur die Welt so gut wie möglich beschreiben.

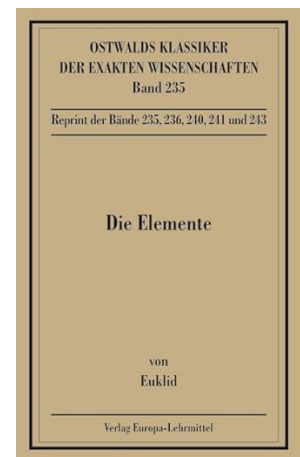
Ein Modell ist also grundsätzlich nicht wahr oder falsch, sondern allenfalls eine gute oder weniger gute Beschreibung der Wirklichkeit. Und das Modell der Geometrie des Altertums scheint bei einer hinreichenden Beschränkung der räumlichen Ausdehnung der betrachteten Phänomene eine recht gute Realitätsbeschreibung zu sein, sonst würden wir nicht heute noch auf ihrer Grundlage unsere Häuser und Straßen bauen.

Wir wissen schon lange, dass eine gerade Linie auf der Erdoberfläche besser durch einen Großkreis auf einer Kugel als durch eine Gerade auf einer Ebene modellhaft beschrieben wird; aber erst im letzten Jahrhundert erschütterte die Erkenntnis³ die Wissenschaft, dass auch eine räumliche Euklidische Geometrie nicht genügt, um den Weltraum korrekt zu beschreiben. Sie liefert nur bei Beschränkung der betrachteten Region (zum Beispiel unser Sonnensystem) annähernd brauchbare Ergebnisse. Wie zur Beschreibung der Ortsbeziehungen auf der Erdoberfläche der Schritt von der ebenen Euklidischen Geometrie zur Kugelgeometrie vollzogen wurde, ist für die Beschreibung der Ortsbeziehungen im Universum der Übergang von der räumlichen Euklidischen Geometrie zu einer relativistischen Geometrie notwendig. Entscheidend ist dabei die Feststellung, dass auch diese wieder nur ein mathematisches Modell der Wirklichkeit sein kann, das bei neuen erweiterten Erkenntnissen über die Natur der Dinge möglicherweise einem erneuten Wandel zu unterziehen ist.

¹ Der griechische Gelehrte Euklid verschaffte in seinem Lehrbuch „Die Elemente“ der bis dahin entwickelten Geometrie eine mathematische Grundlage, indem er alle Lehrsätze auf wenige Axiome zurückführte, die mit der Anschauung in Einklang stehen.

² Ein *Axiom* ist eine als absolut richtig vorausgesetzte Grundannahme einer Theorie, für die kein Nachweis zu leisten ist. (siehe auch §B: Elemente und Prinzipien der mathematischen Theorie)

³ Die Relativitätstheorie Albert Einsteins stellt fest, dass der Weltraum nicht im Euklidischen Sinne „gerade“ und von unendlicher Ausdehnung, sondern „gekrümmt“ und von endlichem Ausmaß ist.





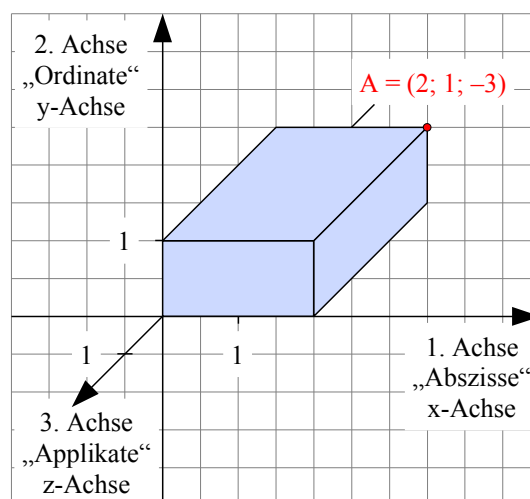
Der jeweilige Kenntnisstand systematischer Wirklichkeitserforschung wird also stets in neuen mathematischen Modellen zusammengefasst. Dabei werden vorangehende Modelle nicht überflüssig, da sie unter bestimmten einschränkenden Bedingungen in der Regel handlichere Beschreibungen als spätere komplexere Systeme liefern. Entscheidend für die kontrollierte Nutzenanwendung aller mathematischen Modelle ist das Bewusstsein hinsichtlich ihres wirklichkeitsvereinfachenden Charakters!

B. Koordinaten und Punktmengen

Die klassische Euklidische Geometrie kennt den Mengenbegriff nicht. Der Raum wird nicht als Punktmenge, sondern als Kontinuum verstanden. Ebenso sind die Objekte der Geometrie wie Geraden und Kreise kontinuierliche, nicht atomisierbare Gebilde. Ein Punkt ist immer nur durch die „Inzidenz“ (den Schnitt, das Zusammentreffen) von zwei Linien definiert. Eine darüber hinaus gehende Positionsbeschreibung für einzelne Punkte existiert nicht; der Ordnung schaffende Bezugspunkt für die geometrische Darstellung liegt im Kopf des Mathematikers.

Erst im 18. Jahrhundert, in der Zeit der Aufklärung, in der die gesamte Geisteswelt zur Objektivierung drängte, erfand der französische Mathematiker und Philosoph René Descartes das nach ihm benannte „kartesische“ Koordinatensystem, durch das jeder „Ort“ (Punkt) des Euklidischen Raumes eindeutig beschrieben werden kann.

Das kartesische Koordinatensystem benutzt dazu einen (willkürlich) festgelegten Bezugspunkt, den sogenannten *Ursprung* O (lat.: „origo“). Durch den Ursprung verlaufen drei gleich normierte reelle Zahlengeraden, die sogenannten *Koordinatenachsen*. Die erste Achse heißt *Abszisse* (vgl. „x-Achse“), die zweite *Ordinate* (vgl. „y-Achse“) und die dritte *Applikate* (vgl. „z-Achse“). Ihre Nullpunkte liegen jeweils im Ursprung, sie stehen dort paarweise senkrecht aufeinander, und sie sind so orientiert⁴, dass sie ein Rechtssystem⁵ bilden:



Jeder Punkt A des Raumes definiert „genau einen“ (einen, aber nicht mehr!) Quader, der A und den Ursprung als diametrale Eckpunkte besitzt und mit drei seiner Kanten auf den Koordinatenachsen liegt. Dieser durch A eindeutig bestimmte Quader heiße *Koordinatenquader* von A. Die auf den Koordinatenachsen liegenden Kanten verbinden den Ursprung mit den Stellen a_1 , a_2 und a_3 auf den drei Achsen. Diese drei Stellen ergeben als geordnetes Tripel⁶ $(a_1; a_2; a_3)$ [in der Graphik⁷: $(2; 1; -3)$] die *Koordinaten* des Punktes A.

- 4 Unter der Orientierung einer Zahlengeraden versteht man die Festlegung der Anordnung hinsichtlich des Anwachsens der Zahlen. Die Orientierung wird graphisch durch genau eine Pfeilspitze verdeutlicht.
- 5 Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand können gleichzeitig so gestreckt werden, dass sie in paarweise senkrecht zueinander stehende Richtungen zeigen. Wird nun der Daumen in die positive Richtung der ersten und der Zeigefinger in die positive Richtung der zweiten Achse gehalten, muss die dritte Achse so orientiert sein, dass ihre positive Richtung durch den Mittelfinger angezeigt wird, wenn es sich um ein Rechtssystem handeln soll.
- 6 Geordnete Kombinationen aus n Zahlen ($n \geq 3$) werden in der Mathematik n-tupel genannt. Ist $n \leq 10$ wird mit Hilfe der lateinischen Zahlwörter eine zweite gängigere Bezeichnung gebildet: Tripel ($n = 3$), Quadrupel ($n = 4$), Quintupel ($n = 5$) usw.
- 7 Bei räumlichen Darstellungen von, mit und in kartesischen Koordinatensystemen gestattet sich MatheBellus aus Gründen der Bequemlichkeit eine systematische Ungenauigkeit, indem die Einheit auf der Applikate nicht exakt halb so groß wie die Einheit auf Abszisse und Ordinate, sondern etwas größer gewählt wird, sodass eine Kästchendiagonale auf der Applikate mit zwei Kästchenlängen auf Abszisse und Ordinate korrespondiert. Diese zeichnerische Bequemlichkeit führt dazu, dass die dargestellten Objekte in der Dimension der Applikate (das heißt, in der „Tiefe“) perspektivisch größer erscheinen, als sie sind.



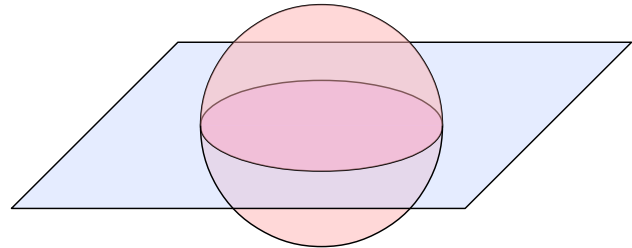
Falls A in einer Koordinatenebene⁸ oder auf einer Koordinatenachse liegt, entartet der Koordinatenquader zu einem Rechteck oder einer Strecke, und eine oder zwei der Koordinaten von A haben den Wert 0. Der Ursprung O selbst hat die Koordinaten (0; 0; 0), und sein Koordinatenquader besteht nur aus einem einzigen Punkt.

Nachdem jeder Punkt des Raumes auf diese Weise eigenständig (das heißt, unabhängig von seiner Bedeutung innerhalb einer geometrischen Figur) beschrieben werden kann, ist der gedankliche Schritt nicht mehr weit, den ganzen Raum als Menge von Punkten aufzufassen. Alle geometrischen Objekte (Gerade, Kreis, Kugel usw.) werden ebenfalls als Punktmengen verstanden; sie bestehen aus Raumpunkten, die zueinander in einer gewissen Beziehung stehen. In diesem Sinne sind geometrische Objekte Teilmengen⁹ des Raumes.

C. Inzidenzen und Zugehörigkeiten

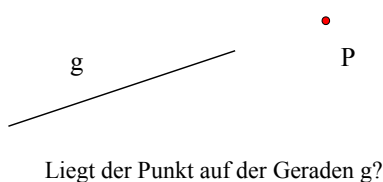
Wenn in eine geometrische Überlegung wenigstens zwei Objekte einbezogen werden, ist die Beantwortung der folgenden drei Fragen immer von vorrangigem Interesse:

- Besitzen die Objekte gemeinsame Punkte?
- Welche Koordinaten haben diese?
- In welcher Beziehung stehen sie gegebenenfalls untereinander?



Dieses Fragenbündel bildet das fundamentale Inzidenz-Problem der Geometrie. Um es im konkreten Fall zu lösen, müssen wir für jeden beliebigen Raumpunkt P entscheiden können, ob er ein Punkt der beteiligten Objekte ist. Auf diese Weise führt das Inzidenz-Problem auf das Zugehörigkeitsproblem:

- Kann, falls ein Objekt o und ein Punkt P gegeben sind, entschieden werden, ob der Punkt P ein Punkt des Objektes o, das heißt, ein Element der Punktmenge o ist?



Schon in der klassischen Geometrie wird eine zeichnerische Beantwortung der Frage kategorisch abgelehnt, weil eine Zeichnung allenfalls als ungenaue Veranschaulichung eines nur gedanklich erfassbaren Sachverhalts verstanden wird. Auch die im Inzidenz-Problem gestellte Frage nach den Koordinaten von Schnittpunkten macht unmissverständlich klar, dass nur rechnerische (*analytische*) Methoden zu einer zufriedenstellenden Lösung führen können.

Tatsächlich ist für die durch Descartes begründete *Koordinatengeometrie* charakteristisch, dass geometrische Objekte algebraisch so beschrieben sind, dass für jeden Raumpunkt mit Hilfe seiner Koordinaten rechnerisch geklärt werden kann, ob er zu einer betrachteten Figur gehört.

D. Identifikation von Punkt und Koordinaten

Bis in das 20. Jahrhundert hinein ist immer zwischen den Punkten des mit einem kartesischen Koordinatensystem versehenen Euklidischen Raumes und ihren Koordinaten als Positionsbeschreibungen unterschieden worden. Das kartesische Koordinatensystem ordnet aber Punkte und Koordinatentripel einander „umkehrbar eindeutig“ zu.

Wir dürfen daher (im Einklang mit der modernen mathematischen Grundlagenforschung) einen Punkt A und sein Koordinatentripel $(a_1; a_2; a_3)$ miteinander identifizieren, das heißt, als ein und dasselbe Objekt betrachten. Der Punkt ist der anschaulich-geometrische Aspekt eines Ortes im Raum, und das zugehörige Zahlentripel seine algebraische Substanz. Im Sinne dieser Identifikation von Punkt und Koordinatentripel verwenden wir das Gleichheitszeichen:

$$A = (a_1; a_2; a_3) .$$

Damit löst die Menge aller Tripel reeller Zahlen den Euklidischen Punktraum als mathematisches Modell des real existierenden Raumes ab. Der klassische Euklidische, mit einem Koordinatensystem versehene Punktraum fungiert zukünftig lediglich als veranschaulichende Brücke zwischen dem algebraischen Modell und der Wirklichkeit.

8 Je zwei der drei Koordinatenachsen definieren eine Koordinatenebene, die die beiden Achsen enthält. Die drei Koordinatenebenen stehen jeweils in einer Koordinatenachse senkrecht aufeinander. Der einzige gemeinsame Punkt aller drei Ebenen ist der Ursprung.

9 Eine Menge N heißt Teilmenge einer Menge M, wenn jedes Element von N gleichzeitig ein Element der Menge M ist. Symbolische Schreibweise: $N \subset M$



1.1 Definition

Die Menge aller Tripel reeller Zahlen $\mathbb{R}^3 := \{(x_1; x_2; x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ werde *Modellraum* genannt.

Die Menge aller Paare reeller Zahlen $\mathbb{R}^2 := \{(x_1; x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ werde *Modellebene* genannt.

Anmerkungen:

- (1) Ist n eine natürliche Zahl, so ist für die Menge aller n -tupel reeller Zahlen $\{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ die Bezeichnung \mathbb{R}^n allgemein üblich.
- (2) Die Zahlentripel $(x_1; x_2; x_3)$ des \mathbb{R}^3 werden mit Bezug auf ihre geometrische Interpretation *Punkte des Modellraumes* genannt. Entsprechend heißen die Zahlenpaare $(x_1; x_2)$ des \mathbb{R}^2 *Punkte der Modellebene*.
- (3) Punkte werden traditionell mit Großbuchstaben bezeichnet. Wir vereinbaren, ihre Koordinaten automatisch mit den zugehörigen indizierten Kleinbuchstaben zu bezeichnen: $A = (a_1; a_2; a_3)$
- (4) Im Unterschied zum algebraischen Modellraum \mathbb{R}^3 werde der (mit einem kartesischen Koordinatensystem versehene) klassische Euklidischen Raum *Anschauungsraum* genannt.

Die Definition (1.1) ist gleichsam der „Urknall“ unserer *Analytischen Geometrie* des MatheBellus. Von der Schöpfung des algebraischen Modellraumes nimmt die Entwicklung der Theorie ihren Ausgang.

Es ist ein wichtiges Ziel dieser Präsentation der Analytische Geometrie, mit dem Prozess mathematischer Modellbildung vertraut zu machen. Die Analytischen Geometrie eignet sich deswegen so gut für dieses Vorhaben, weil mit den in der Mittelstufe des Gymnasiums erworbenen Kenntnissen der klassischen Geometrie und der Koordinatengeometrie der Fortschritt der Theoriebildung gedanklich wirkungsvoll kontrolliert werden kann.

Allerdings bringt Vorwissen auch eine Tücke mit sich. Es begünstigt die Versuchungen, „Das sieht man doch!“ oder „Das ist doch schon lange klar!“ zu denken. Es ist eine nicht kleine Portion gedanklicher Disziplin erforderlich, diesen Versuchungen zu widerstehen und den mathematischen Prinzipien treu zu bleiben!

Nach seiner Schöpfung weist der Modellraum \mathbb{R}^3 noch keinerlei Strukturen auf. Er ist wie die archaische Erde „wüst und leer“. Es ist die Aufgabe der Analytischen Geometrie, ihn mit Geraden, Kreisen, Kugeln, Ebenen und anderen Dingen zu beleben. Dabei ist sie gehalten, diese Dinge so zu erschaffen, dass sie nach dem Bild der klassischen Euklidischen Geometrie geraten.

Die Euklidische Geometrie liefert den Leitfaden für den Aufbau der Analytischen Geometrie im „Raum der Zahlentripel“. Bei diesem theoretischen Abenteuer werden wir stets danach trachten, die Lehrsätze der klassischen Euklidischen Geometrie zu reproduzieren, um die Realitätsnähe der mathematischen Modellbildung zu kontrollieren. Die Analytische Geometrie ist nur dann als valide („gültig“) anzusehen, wenn bei ihrem Aufbau keine Widersprüche zu den Aussagen der klassischen Euklidischen Geometrie erzeugt werden.

Darüber hinaus erwarten wir von der Analytischen Geometrie natürlich weitergehende geometrische Erkenntnisse. Es ist an dieser Stelle nicht zu viel versprochen, wenn wir einen großartigen Erkenntnisgewinn ankündigen.

Den Schluss dieses ersten Paragraphen bildet auf der nächsten Seite ein Schaubild, das die Analytische Geometrie sowohl in einen historischen als auch in einen wissenschaftstheoretischen Zusammenhang einordnet.

